Devoir n° 2 - TS5. 13/10/09

I (S) $\begin{cases} -x^2-x+2 \leq 0 & (E_1) \\ 2x^2+x-15<0 & (E_2). \end{cases}$

Soit $P_1(x) = -x^2-x+2$; $\Delta = 9$; $x_1 = \frac{1+3}{-2} = -2$; $x_2 = 1$

d'où le signe de P_1 est

x		-2		1	
$P_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

soit $P_2(x) = 2x^2+x-15$; $\Delta = 121$; $x_1 = \frac{-1+11}{4} = \frac{5}{2}$; $x_2 = -3$

d'où le signe de P_2 :

x		-3		$5/2$	
$P_2(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

le système S équivaut à $\begin{cases} P_1(x) \leq 0 \\ P_2(x) < 0 \end{cases}$ $\iff x \in \left( ]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[\right) \cap]-3;\frac{5}{2}[$

d'où $S =]-3,-2] \cup [1;\frac{5}{2}[$

(faire un dessin)

II ① On a $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}}}$

$= \dfrac{2x}{4\sqrt{1+x^2}\sqrt{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{x\sqrt{\sqrt{1+x^2}}}{2(1+x^2)}$

② $g'(x) = \left(\sqrt{(x+1)^3}\right)' \cos\left(\sqrt{(x+1)^3}\right)$

$= \dfrac{3(x+1)^2}{2\sqrt{(x+1)^3}} \cos\left(\sqrt{(x+1)^3}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}\ \cos\left(\sqrt{(x+1)^3}\right)$

III ① $f(x) = \sqrt{x^2-x^3}$.

$x \in D_f \iff x^2-x^3 \geq 0$
$\iff x^2(1-x) \geq 0$

Tableau de signes :

x		0		1	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x^2(1-x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

donc $D_f =]-\infty;1]$

② $x \longmapsto x^2-x^3$ continue sur D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (d'après le tableau)
$X \longmapsto \sqrt{X}$ continue sur $\mathbb{R}_+$
donc par composée ; f continue sur D_f

③ On a $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

$= \sqrt{(1-x)x^2} = |x|\sqrt{1-x}$.

Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ pour $x \neq 0$

$= \dfrac{|x|\sqrt{1-x}}{x} = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} X = 1 - x. \\ \lim\limits_{x \to 0} 1 - x = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1-x} = 1$

d'où $\lim\limits_{0^+} t = 1$ et $\lim\limits_{0^-} t = -1$

d'où f non dérivable en 0 mais la courbe représentative C_f de f admet en 0 deux demi-tangentes (de coeff directeur +1 à droite et -1 à gauche)

Ⓘⓥ $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{|x| - 2}$;

① $x \in D_f \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \notin \{-2; 2\}$. donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

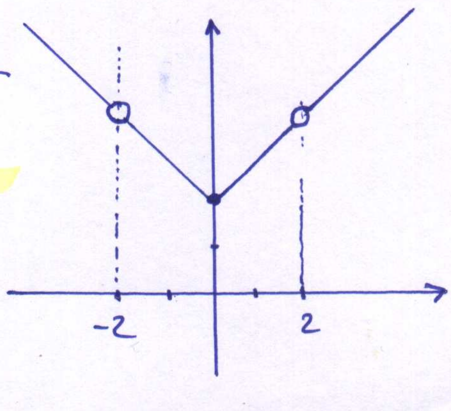
② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{-x - 2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ car $|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{(x+2)(x-2)}{-(x+2)} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$; $(x \in D)$

③ $x \longmapsto x + 2$ et $x \longmapsto 2 - x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est clairement continue sur $D \setminus \{0\}$.

$\lim\limits_{0^+} f = 2$ et $\lim\limits_{0^-} f = 2^-$ et de plus $f(0) = 2$

d'où $\lim\limits_{0} f = f(0)$ $\rightarrow$ f continue sur D.



V) $x \longmapsto \sin x$ continue sur $]-2;1[$

$x \longmapsto E(x)$ continue sur $]-2;1[\setminus \{-1;0\}$

donc par produit $x \longmapsto \sin x \, E(x)$ continue sur $]-2;1[\setminus \{-1;0\}$.

- Etudions la continuité en 0 : $\lim\limits_{0^+} E = 0$; $\lim\limits_{0^-} E = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

donc par produit $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x \, E(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \sin x \, E(x) = 0$

et $f(0) = 0$ d'où f continue en 0.

- Continuité en 1 : $\lim\limits_{1^+} E = 1$; $\lim\limits_{1^-} E = 0$ et $\lim\limits_{1} \sin = \sin(1)$

d'où par produit

$$\lim_{1^+} f = \sin(1)$$

$$\lim_{1^-} f = 0$$

et $\sin(1) \neq 0$ donc f non continue en 1.

VI) ① $f(x) = x + \sin x - 1$; $x \in \mathbb{R}$

f est dérivable d'après les règles de dérivat°

on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$ (car $\cos x \geqslant -1$).

donc $f'(x) \geqslant 0$ et $\cos x = -1$ en des valeurs isolées donc $f'(x) = 0$ en des valeurs isol

donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

② $\sin x \geqslant -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

d'où par somme ; $f(x) \geqslant x - 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$

donc par comparaison $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\sin x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc par somme $f(x) \leqslant x$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

③ $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ car dérivable} \\ f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \; ; \; \lim\limits_{-\infty} f = -\infty \\ 0 \in]-\infty; +\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après le th. de la bijection° l'éq $f(x) = 0$ admet une unique solut° sur $\mathbb{R}$.

donc finalement l'éq (E) : $\sin x = 1-x$ admet une sol° unique sur I

VIII ① $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

② a) P dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$ $P'(x) = 6x^2 - 6x$

$= 6x(x-1)$

x	-1		0		1	
Signe de P'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

On déduit donc le tableau de variations de P :

x	-1		0		1		$+\infty$
$P'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$

$\lim\limits_{-1} P = -6$ (par th.)

b) Sur $]-1\,;1]$; -1 est le maximum de P donc P n'admet pas de

Sur $[1\,;+\infty[$;

$\left.\begin{array}{l} P \text{ est continue car dérivable} \\ P \text{ est strictement croissant.} \\ P(1) = -2\,;\ \lim\limits_{+\infty} P = +\infty \\ 0 \in [-2\,;+\infty[\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ d'après le th de la bijection $P(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$

On a $\left.\begin{array}{l} P(1) = -2 < 0 \\ P(2) = 16 - 12 - 1 = 3 > 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow \alpha \in [1\,;2]$

Conclusion : Sur $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$ admet une unique solut° α telle que $1 \leq$

② $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

a) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$ (par th).

$1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$

Soit $\varphi(x) = 1-x+x^2$; $\Delta = -3 < 0$ donc $1-x+x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc le signe de $1+x^3$ est celui de $1+x$ d'où $1+x^3 \geq 0$ sur D.

donc $\lim\limits_{x \to -1^+} 1+x^3 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1} 1-x = +2$ $\Longrightarrow$ par quotient, $\lim\limits_{-1^+} f = +\infty$

ⓑ f dérivable sur D d'après les règles de dérivation.

$$\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{(1+x^3)\times(-1) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$$

$(1+x^3)^2 \geqslant 0$ sur D donc le signe de f' est celui de P

d'où le tableau de variations de f :

x	-1		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification du signe de P :

d'après le tableau de variations de P

on a $P(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,; 1]$ car -1 max de P sur cet intervalle.

et sur $[1\,; +\infty[$ P strictement croissant donc si $1 \leqslant x \leqslant \alpha$ alors $P(x) \leqslant P$

$\Leftrightarrow P(x) \leqslant$

et si $x \geqslant \alpha$; $P(x) \geqslant P(\alpha)$

c.à.d $P(x) \geqslant$

donc le signe de P est

x		α	
$P(x)$	$-$	0	$+$

③ on a $P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$ $(*)$

et $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha^3} = \dfrac{2(1-\alpha)}{2+2\alpha^3}$ et $2\alpha^3 = 1 + 3\alpha^2$ d'après $(*)$

$$= \frac{2(1-\alpha)}{2+1+3\alpha^2} = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$$

VIII ① $\sqrt{67} < \sqrt{81}$ donc $\sqrt{67} < 9$

il suffit de tester la divisibilité de 67 par les nombres premiers inférieurs

67 non divisible par 2, 3, 5 par critère

$67 = 7 \times 9 + 4$ donc 7 ne divise pas 67.

donc 67 est premier.

② $2010 = 201 \times 5 \times 2$
$= 67 \times 3 \times 5 \times 2$

Le plus petit entier n tel que $n \times 2010$ soit un carré est donc $n = 67 \times 3 \times 5 \times$
$= 2010$

IX pour $n \geq 3$; $n! = 1 \times \cdots \times (n-1) \times n$ donc $n-1 \mid n!$

et donc par combinaisons linéaire à coeff entier $n-1 \mid N$ et $n-1 \neq 1$
$n-1 \neq N$

d'où N non premier.

X p premier ; $p \geq 5$

si $p = 4k$ impossible.

si $p = 4k+1$ alors $p^2-1 = (p+1)(p-1)$
$= (4k+2)4k$
$= 16k^2+8k = 8(2k^2+k)$ divisible par 8

si $p = 4k+2$ $k \in \mathbb{N}^*$ impossible (car alors p pair et $p \geq 5$ et p premier)

si $p = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}^*$ alors $p^2-1 = (4k+4)(4k+2)$
$= 16k^2+24k+8 = 8(2k^2+3k+1)$ divisible par

Conclusion : On a toujours p^2-1 divisible par 8 lorsque p est premier.