Devoir n° 3

I

① $f(x) = \ln(3x^4 - 4x^3 + 2) - \ln(2x^6 + 1)$

$$= \ln\left(\frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{2x^6 + 1}\right)$$

$$X = \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{2x^6 + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{2x^6 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0 \quad \text{(par Th)}$$

$$\lim_{X \to 0} \ln X = -\infty$$

par composée $\Longrightarrow$ $\lim_{+\infty} f = -\infty$

② $f(x) = \dfrac{x^2 - x\ln x}{x + \ln x}$

$$= \frac{x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)} = x \; \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}}$$

et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'où $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} = 1$ et donc par produit $\lim_{+\infty} f = +\infty$

③ $f(x) = \dfrac{\ln(1 + \sin x)}{x^2}$

$$= \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x}$$

$X = \sin x$

$\lim_{0} \sin x = 0$

$\lim_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (par Th)

Composée $\Longrightarrow$ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} = 1$

$\lim_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (par Th) et $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ d'où par produit $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$ (car $\ln(1) = 0$ et ln croissante)

$X = \ln x$

$\lim \ln x = 0^+$

$\lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$

Composée $\Longrightarrow$ $\lim_{x \to 1^+} \ln(\ln(x)) = -\infty$

II

① $f(x) = \dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$= 4\,\dfrac{(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ (de la forme $4 \cdot \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

d'où les primitives de f sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions F de la forme

$F(x) = 4\sqrt{x^2+x+1} + K$; $K \in \mathbb{R}$

② $f(x) = \sin x\,(\cos x)^{-3}$

$= -\underbrace{(-\sin x)(\cos x)^{-3}}_{\text{de la forme } u'u^{-3}}$

Donc les primitives de f sont les fonctions F de la forme

$F(x) = -\dfrac{(\cos x)^{-2}}{-2} + K$; $K \in \mathbb{R}$

c'est à dire $F(x) = \dfrac{1}{2(\cos x)^2} + K$

III ① $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln$ admet une unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(0)=0$. (Cours).

② $h(x) = F(1+x^2)$.

$x \longmapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

$X \longmapsto F(X)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par composée $x \mapsto F(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

d'où h dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$h'(x) = 2x\,F'(1+x^2)$

$= 2x\ln(1+x^2)$.