10 Novembre 2009

Devoir de mathématiques N°4

I a) $f(x) = \dfrac{7}{1-3x} + \dfrac{1}{(1-3x)^3}$; $D = \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$

$$= -\frac{7}{3} \cdot \underbrace{\frac{-3}{1-3x}}_{\frac{u'}{u}} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(-3)(1-3x)^{-3}}_{u'u^{-3}}$$

f étant continue, f admet des primitives et $F(x) = -\frac{7}{3}\ln|1-3x| - \frac{1}{3}\,\frac{(1-3x)^{-2}}{-2} + K$, $K \in \mathbb{R}$

d'où $F(x) = -\frac{7}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-3x)^2} + K$; $K \in \mathbb{R}$

(sur D ; $|1-3x| = 3x-1$).

b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x} \times \ln x}_{u'u.}$ $D = \mathbb{R}_+^*$

La f° g est continue sur D donc elle admet des primitives

$G(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + K$; $K \in \mathbb{R}$

II a) $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{(\ln x)^2} = \dfrac{x}{(\ln x)^2}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par th d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$

pour $x > 1$ on a $0 < x < x^2$ d'où $0 < \dfrac{x}{(\ln x)^2} < \dfrac{x^2}{(\ln x)^2}$ (*)

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ et par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^2 = +\infty$

donc par théorème des gendarmes avec (*) on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^2} = +\infty$

Finalement, par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

<u>Remarque</u> : Autre méthode pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^2} = +\infty$:

$$\frac{x}{(\ln x)^2} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}\right)^2$$ puis par composition

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} X = \sqrt{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \text{ par th} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{par composée } \lim_{+\infty} f = 0.$$

III (a) $\ln(x+1) \geq 0 \iff x+1 \geq 1$
$\iff x \geq 0.$

Soit (E_1) : $(7x-5)\ln(x+1) > 0$;
le domaine de résolution est $D =]-1 ; +\infty[$.
On a le tableau de signes suivant

x	-1		0		$5/7$	
$7x-5$		$-$		$-$	0	$+$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$

d'où $S =]-1 ; 0[\cup]\frac{5}{7} ; +\infty[$.

(b) $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \leq 0.$ (E_2)

Domaine de résolution : il faut $5-x > 0 \iff x < 5$
et $x-1 > 0 \iff x > 1$
d'où $D =]1 ; 5[$

$(E_2) \iff \ln((5-x)(x-1)) \leq \ln 3$
$\iff (5-x)(x-1) \leq 3$ car $\ln$ strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$
$\iff -x^2 + 6x - 5 \leq 3$
$\iff x^2 - 6x + 8 \geq 0$; $\Delta = 36 - 32 = 4$; $x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$
$x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$

d'où

x		2		4	
x^2-6x+8	$+$	0	$-$	0	$+$

d'où $x^2 - 6x + 8 \geq 0 \iff x \in]-\infty ; 2] \cup [4, +\infty[$

donc $S =]1 ; 2] \cup [4 ; 5[$

V (1) La bonne réponse est $f(x) = \ln(1-x^2) + K$.

(2) $\ln(20.000) - 4(\ln 5 + \ln 2) = \ln(20000) - 4(\ln 10)$
$= \ln 20\,000 - \ln 10\,000$
$= \ln 2 = -\ln\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\sin 7x}{\tan x} = \frac{\sin 7x}{7x} \times 7 \times \frac{x}{\tan x}$ d'où la limite vaut 7

(4) $\ln x^2 = 2\ln x \quad \forall x > 0$ d'où $S = \mathbb{R}_+^*$

(5) $\ln x^2 = \ln\frac{1}{x}$ admet $\mathbb{R}_+^*$ comme domaine de résolut°

$\ln x^2 = \ln\frac{1}{x} \iff x^2 = \frac{1}{x} \iff x^3 = 1 \iff x = 1$

d'où une seule solut°

VI ① $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ pour $x > 0$

f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivabilité et

$\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2x}$

$2x > 0$ pour $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 2$.

$\sqrt{x} - 2 > 0 \iff \sqrt{x} > 2$

$\iff x > 4$ car $x \mapsto x^2$ strict $\nearrow$.

donc le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau

x		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

et on déduit le tableau de variations.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	

En 4 la dérivée s'annulle en changeant de sig[ne]
(elle passe de $-$ à $+$)
donc f présente un minimum en $x = 4$
qui vaut $f(4) = 2 - \ln 4$
$= 2 - 2\ln 2 \simeq 0{,}6$ à 10^{-1}

② On déduit donc

que $\forall x > 0$; $f(x) \geq f(4) > 0$.

c'est à dire $\sqrt{x} - \ln x > 0 \iff \ln x < \sqrt{x}$ $\forall x > 0$ (

d'autre part pour $x > 1$; $\ln$ croissante (car sa dérivée est positive)

d'où $\ln x > 0$ (A_2)

donc les encadrements (A_1) et (A_2) donnent

$\forall x > 1$ $0 < \ln x < \sqrt{x}$

$\iff 0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ $\left(\times \dfrac{1}{x} \text{ avec } x > 0\right)$

③ $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

d'où d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

VII ① ⓐ pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$

d'où $f(x)+1 = \dfrac{\ln x + x - \ln x}{x-\ln x} = \dfrac{x}{x-\ln x}$

or $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ d'où par somme $\lim\limits_{x\to 0} x-\ln x = +\infty$

et par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ +

d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ car $f(x) = (f(x)+1) - 1$

en conséquence $\lim\limits_{0} f = f(0) \Rightarrow$ f continue en 0.

ⓑ Soit $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pour $x \neq 0$

$$= \frac{\frac{\ln x}{x-\ln x}+1}{x} = \frac{\frac{x}{x-\ln x}}{x} = \frac{1}{x-\ln x}$$

et $\lim\limits_{x\to 0} x-\ln x = +\infty$ d'où par quotient $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$

donc f dérivable en 0 et $f'(0)=$

la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse

② $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$ $\forall x>0$

$$= \frac{\ln x}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = \left(\frac{\ln x}{x}\right) \times \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par th. d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{\ln x}{x} = 1$ et par produit $\lim\limits_{+\infty}$

On déduit que $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horiz

③ f dérivable d'après les règles de dérivation (pour $x>0$)

et $\forall x>0$; $f'(x) = \dfrac{(x-\ln x)\times\frac{1}{x} - \ln x(1-1/x)}{(x-\ln x)^2}$

$$= \frac{1}{(x-\ln x)^2}\left(1-\frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

or $(x-\ln x)^2 > 0$ $\forall x>0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln$

$1-\ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 1$
$\iff x \in]0; e]$

d'où le signe de $1-\ln x$:

x	0		e	
$1-\ln x$	$\|\|$	$+$	0	$-$

et le tableau de variations de f :

x	0		e		
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

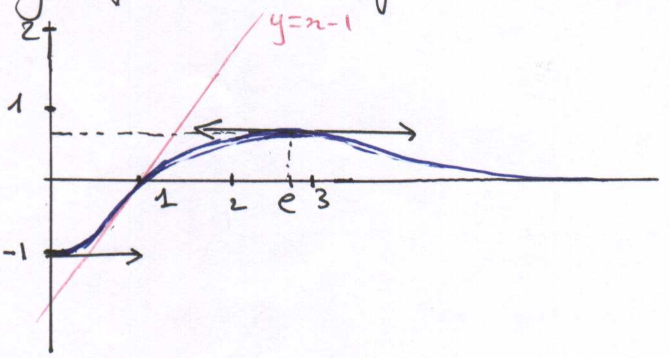
avec $f(e) = \dfrac{\ln e}{e-\ln e} = \dfrac{1}{e-1}$

④ C_f coupe $(Ox) \iff f(x)=0$

$\iff \dfrac{\ln x}{x-\ln x} = 0 \iff \ln x = 0$
$\iff x = 1$

Au point d'abscisse $x=1$ la tangente a pour équation.

$y = f'(1)(x-1)+f(1) \iff y = x-1$



VIII ① $g(x) = \tan x - x$

ⓐ $\lim\limits_{+\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$ et $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} \tan = -\infty$ donc par somme $\begin{cases} \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g = +\infty \\ \lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} g = -\infty \end{cases}$

ⓑ g dérivable sur I d'après les règles de dérivation et

$\forall x \in I,\ g'(x) = \tan^2 x + 1 - 1 = \tan^2 x$

d'où $g'(x) \geqslant 0\ \forall x \in I \Rightarrow g$ croissante (strictement) sur I

ⓒ $g(0)=0$ d'où pour $x<0$, $g(x) < g(0)$ (car $g \uparrow$)
$\iff g(x) < 0$

et pour $x>0$; $g(x) > g(0)$ (car $g \uparrow$)
$\iff g(x) > 0.$

Finalement le signe de g se résume par

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

② ⓐ $x \mapsto \tan x$ dérivable sur I par th.

$x \mapsto x + \frac{x^3}{3}$ dérivable (polynôme)

Donc par somme f dérivable sur ~~sur~~ I et

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 - \frac{3x^2}{3}$$
$$= \tan^2 x - x^2$$
$$= (\tan x + x)(\tan x - x)$$

Remarque : I centré en 0 et $\forall x \in I$; $f(-x) = -f(x)$ car $\tan$; $x \mapsto x$; $x \mapsto x^3$ i

d'où f est impaire.

On étudie f sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

Alors sur $[0, \frac{\pi}{2}[$; $\tan x + x > 0$ et $\tan x - x = g(x) > 0$

d'où $f'(x) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

ⓒ On déduit f croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et comme f impaire

f est croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; 0]$.

On a le tableau de variations :

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

IV ① $3^2 = 9$

$3^3 = 27 \equiv 5\ (11)$

$3^4 \equiv 15 \equiv 4\ (11)$

$3^5 \equiv 12 \equiv 1\ (11)$

Donc si $n = 5k$ alors $3^n \equiv (3^5)^k \equiv 1\ (11)$ donc le reste est 1

si $n = 5k+1$ alors $3^n = (3^5)^k \times 3 \equiv 3\ (11)$ ——— 3

si $n = 5k+2$ alors $3^n = (3^5)^k \times 9 \equiv 9\ (11)$ ——— 9

si $n = 5k+3$ alors $3^n = (3^5)^k \times 3^3 \equiv 5\ (11)$ ——— 5

si $n = 5k+4$ alors $3^n \equiv (3^5)^k \times 3^4 \equiv 4\ (11)$ ——— 4

② Finalement $3^n + 7 \equiv 0\ (11) \iff 3^n \equiv -7\ (11)$

$\iff 3^n \equiv 4\ (11)$

Les solutions sont les n s'écrivant $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$