Devoir de mathématiques. 16 dec 2009

I A 1 a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

d'où par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} X = 1+e^{-x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{X\to1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{par composée}} \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

b Soit $h(x) = f(x) - \frac{1}{3}(x)$; $x\in\mathbb{R}$

$= \ln(1+e^{-x})$.

D'après a $\lim\limits_{+\infty} h = 0$ donc $d : y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à C en $+\infty$

c La position relative de C et d est donnée par le signe de h

$h(x) \geqslant 0 \iff \ln(1+e^{-x}) \geqslant 0$

$\iff 1+e^{-x} \geqslant 1$ (car exp strict croissante sur $\mathbb{R}$)

$\iff e^{-x} \geqslant 0$ et ceci est toujours vrai par thm.

d'où $\forall x\in\mathbb{R}$ $h(x) \geqslant 0$ $\Rightarrow$ C est au dessus de d.

d $\forall x\in\mathbb{R}$ $\ln(e^{x}+1) - \frac{2}{3}x = \ln(e^{x}(1+e^{-x})) - \frac{2}{3}x$

$= x + \ln(1+e^{-x}) - \frac{2}{3}x = \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

$= f(x)$

d'où $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x) = \ln(e^{x}+1) - \frac{2}{3}x$

e

$$\left.\begin{array}{l} X = e^{x}+1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+1 = 1 \text{ (par somme)} \\ \lim\limits_{X\to1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{par composée}} \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{x}+1) = 0$$

d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$

donc par somme $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

2 a f dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de de dérivat°.

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-1}{e^{x}+1} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-3+e^{x}+1}{3(e^{x}+1)}$

$= \dfrac{e^{x}-2}{3(e^{x}+1)}$

d'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^{x}-2}{3(e^{x}+1)}$

(b) $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad 3(e^x+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de e^x-2.

$e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2$

$\iff x > \ln 2$ (car ln strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$)

Finalement on déduit f croissante (strictement) sur $]\ln 2 ; +\infty[$

et f décroissante (- - - - - - - -) sur $]-\infty ; \ln 2[$.

Tableau de variations :

x		$\ln 2$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$	$\nearrow +\infty$

$$f(\ln 2) = \ln(1+e^{-\ln 2}) + \frac{\ln 2}{3}$$
$$= \ln \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{3}$$
$$= \ln 3 - \ln 2 + \frac{\ln 2}{3} = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$$

(B) (1) T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\iff y = -\frac{1}{6}x + \ln 2$ son coefficient directeur est $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

(2) Soit $M(x, f(x)) \in C$; $x \in \mathbb{R}$

et $N \in C$ d'abscisse opposée donc $N(-x ; f(-x))$

la droite (MN) a pour coefficient directeur $a = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)}$

d'où $a = \frac{1}{2x}\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x - \left(\ln(e^{-x}+1) - \frac{2}{3}(-x)\right)\right)$ (d'après 1.d $f(-x) = \ln(e^{-x}+1) - \frac{2}{3}(-x$

$$= \frac{1}{2x}\left(-\frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{6}$$

Le coefficient directeur de (MN) est donc celui de T d'où $(MN) \parallel T$.

(II) (1) pour $x > 0$; $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

et par théorème, $\lim\limits_{0} f = 1$

de plus $f(0) = 1$ d'où f continue en 0.

(2)(a) $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$.

g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \geq 0$; $g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{(1-x+x^2)(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x}\left(1 - (1 + x - x - x^2 + x^2 + x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{1+x}\left(1 - (1+x^3)\right) = \frac{1}{1+x}(-x^3) = -\frac{x^3}{1+x}$$

Sur $\mathbb{R}_+$; $x^3 \geq 0$; $1+x > 0$ d'où $g'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

Donc g décroissante sur $\mathbb{R}_+$; en particulier

$\forall x \geq 0$; $g(x) \leq g(0)$

c'est-à-dire $g(x) \leq 0$

$$\iff \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

(b) Soit $h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$

h dérivable d'après les règles de dérivation et $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$$

$$= \frac{1}{1+x}\left(1 - (1-x)(1+x)\right) = \frac{x^2}{1+x}$$

d'où sur $\mathbb{R}_+$, $h'(x) \geq 0$ donc h croissante sur $\mathbb{R}_+$

et donc $\forall x \geq 0$; $h(x) \geq h(0)$

$$\iff h(x) \geq 0 \iff \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

(c) D'après (a) et (b)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\iff -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$ (on retranche x à chaque m

$$\iff -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$ ($\div\, x^2$ avec $x^2 > 0$)

Soit $t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, $x \neq 0$ le taux d'accroissement de f en 0.

$$\forall x > 0, \quad t(x) = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

d'où d'après ce qui précède, $\forall x > 0$; $-\frac{1}{2} \leq t(x) \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

$\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; donc d'après le th. des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} t(x) = -\frac{1}{2}$

On déduit donc que f dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

(3) (a) $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$

h est dérivable d'après les règles de dérivation sur $\mathbb{R}_+$

et $\forall x \geq 0$ $\quad h'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$

$$= \frac{1 - (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

Sur $\mathbb{R}_+$, $x \geqslant 0$ et $(1+x)^2 > 0$ d'où $h(x) \leqslant 0$

donc h décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0$ on a $h(x) \leqslant h(0)$

$\iff h(x) \leqslant 0$.

d'où sur $\mathbb{R}_+$, h est négative.

(b) f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivation

et $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)\right)$

$= \frac{h(x)}{x^2}$

(c) h étant négative sur $\mathbb{R}_+$, on déduit $f'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$

d'où le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-1/2$	
$f(x)$	$1 \searrow$	0

$\forall x > 0$

$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

$= \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+x}{x} = 1$ (par thm) ; Soit $X = 1+x$

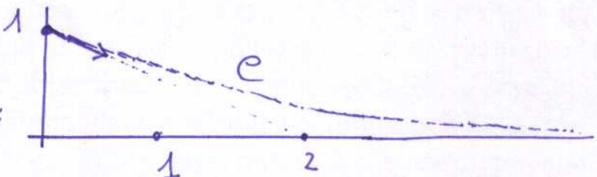
$\lim\limits_{x \to +\infty} 1+x = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par croissance comparée

$\Big\}$ $\overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{x \to +\infty}$

d'où par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

(d) Représentation sommaire de $\mathcal{C}$:



$y=0$ asymptote à $\mathcal{C}$ car $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

III ① $f(x) = xe^{3x}$; $x \in \mathbb{R}$

f dérivable d'après les règles de dérivation et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} + 2xe^{3x}$

$= e^{3x}(5x+1)$ d'où f solution de (E).

② (H) : $y' + 2y = 0$.

On reconnait une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont les solut° sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ke^{-2x}$; $K \in \mathbb{R}$

③ $g-f$ solution de (H) $\iff \forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) - f'(x) + 2g(x) - 2f(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) + 2g(x) = f'(x) + 2f(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + 2g(x) = xe^{3x}$

$\iff g$ solution de (E).

④ g solution de (E) $\iff$ $g-f$ solution de (H)

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) - f(x) = Ke^{-2x} \iff \forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = Ke^{-2x} + xe^{3x}$

⑤ $A \in \mathcal{C}_g \iff Ke^{-2\ln 2} + \ln 2\, e^{3\ln 2} = 40\ln 2 \iff \frac{K}{4} + 8\ln 2 = 40\ln 2 \iff K = 128\ln 2$

d'où $g(x) = 128\ln 2\, e^{-2x} + xe^{3x}$; x