Devoir N°7

I ① $a_1 = \frac{7+i}{3-2i} = \frac{(7+i)(3+2i)}{13} = \frac{19}{13} + \frac{17}{13}i$

$a_2 = \frac{-3}{(1+i)(2-i)} = \frac{-3}{3+i} = \frac{-3(3-i)}{10} = -\frac{9}{10} + \frac{3i}{10}$

$a_3 = \sin\alpha + i\cos\alpha$. C'est déjà sous forme algébrique !

$a_4 = 3e^{i\frac{7\pi}{2}} + 2e^{i2\pi}$

$= -3i + 2 = 2-3i$

② $b_1 = \frac{2+i}{1-2i}$ donc $\overline{b_1} = \overline{\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)} = \frac{2-i}{1+2i}$

$= \frac{(2-i)(1-2i)}{5} = -\frac{5i}{5} = -i$

Rq : si on factorise b_1 par i :

$b_1 = i\frac{(1-2i)}{1-2i} = i$ d'où $\overline{b_1} = -i$

$b_2 = i e^{i\pi/4}$ d'où $\overline{b_2} = \overline{i e^{i\pi/4}}$

$= \overline{e^{3i\pi/4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

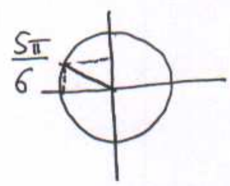
$= \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $c_1 = -3 + i\sqrt{3}$

$|c_1|^2 = 12 \Rightarrow |c_1| = 2\sqrt{3}$ d'où $c_1 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$= 2\sqrt{3}\, e^{5i\pi/6}$



$c_2 = -3e^{i\pi/3}$

$= 3e^{i\pi}e^{i\pi/3} = 3e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$c_3 = -2i = 2e^{-i\pi/2}$

④ $|d_1| = \left|-i\frac{2+i}{(1-i)(1+2i)}\right|$

$= \frac{|2+i|}{|1-i||1+2i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

II $(E_1) \Leftrightarrow i\bar{z} + 2 = i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{i-2}{i}$

$= \frac{1-2i}{-1} = 1+2i$ d'où $z = 1-2i$ donc $S = \{1-2i\}$

$(E_2) \Leftrightarrow iz + \bar{z} = 2$

posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $(E_2) \Leftrightarrow i(x+iy) + (x-iy) = 2$

$\Leftrightarrow ix - y + x - iy = 2$

$\Leftrightarrow x - y + i(x-y) = 2$

donc par identification des parties réelles et imaginaires on a

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc $S=\emptyset$

$(E_3) \Leftrightarrow 5z^2+z-15=0.$

$\Delta = 1+300 = 301 > 0$ donc (E_3) admet deux solutions réelles : $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{301}}{10} ; \frac{-1-\sqrt{301}}{10}\right.$

III ① Posons $A(-3i)$ alors $M \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \arg(z-z_A)=\frac{\pi}{6}\ (\pi)$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{6}\ (\pi)$ d'où la construct

② Soit $B(3+2i)$ alors $M \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\pi\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi\ (2\pi)$ d'où $\mathcal{E}_2 =]AB[$

③ Soit $C(2i-4)$; $D(2i)$

$M \in \mathcal{E}_3 \Leftrightarrow i\,\frac{z-z_C}{z-z_D} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \arg\left(i\,\frac{z-z_C}{z-z_D}\right) = 0\ (2\pi)$ ou $z=z_C$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou $M=C$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou $M=C$

c'est un demi-cercle de diamètre $[CD]$ privé de D

④ $M \in \mathcal{E}_4 \Leftrightarrow |z+4+i| = |\bar{z}-i|$

$\Leftrightarrow |z+4+i| = |\overline{\bar{z}-i}| \Leftrightarrow |z+4+i| = |z+i|$

$\Leftrightarrow |z-z_E| = |z-z_F|$ avec $E(-4-i)$; $F(-i)$

$\Leftrightarrow ME = MF$ d'où $\mathcal{E}_4$ médiatrice de $[EF]$

⑤ $M \in \mathcal{E}_5 \Leftrightarrow |2z-4i| = 2$

$\Leftrightarrow 2|z-2i| = 2 \Leftrightarrow |z-2i| = 2 \Rightarrow \mathcal{E}_5 = \mathcal{C}(D;1).$

Exercice 3 :

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification) :

- $\mathscr{E}_1 = \left\{M(z) \ / \ \arg(z+3\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6} \quad (\pi)\right\}$
- $\mathscr{E}_2 = \left\{M(z) \ / \ \arg\left(\dfrac{z+3\mathrm{i}}{z-3-2\mathrm{i}}\right) = \pi \quad (2\pi)\right\}$
- $\mathscr{E}_3 = \left\{M(z) \ / \ Z = \mathrm{i}\dfrac{z+4-2\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}} \in \mathbb{R}_+\right\}$
- $\mathscr{E}_4 = \{M(z) \ / \ |z+4+\mathrm{i}| = |\bar{z}-i|\}$
- $\mathscr{E}_5 = \{M(z) \ / \ |2z-4\mathrm{i}| = 2\}$