26 janv

Devoir N° 8 de mathématiques (1h)

I

1) a) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$

h a pour écriture complexe $z' = \sqrt{2}(z - z_A) + z_A$

d'où $z' = \sqrt{2}(z - i) + i$ c'est à dire $z' = \sqrt{2}z + i(1 - \sqrt{2})$

$B_1 = h(B) \iff z_{B_1} = \sqrt{2}\,2 + i(1 - \sqrt{2})$

b) r rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour écriture $z' = e^{i\pi/4}(z - z_A) +$

c'est à dire $z' = e^{i\pi/4}(z - i) + i$

$B' = r(B_1) \iff z_{B'} = e^{i\pi/4}(2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) - i) + i$

$= e^{i\pi/4}(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + i$

$= \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}(2 - i) + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2 - i) + i = (1+i)(2-i) + i$
$= 3 + 2i$

d'où $z_{B'} = 3 + 2i$

2) a) f a pour écriture complexe $z' = (1+i)z + 1$

d'où l'image de B a pour affixe $z' = (1+i)2 + 1$
$= 3 + 2i = z_{B'}$

on a donc bien $z_{B'} = f(B)$

b) $M(z)$ invariant par $f \iff f(M) = M \iff z' = z \iff z = (1+i)z + 1$

$\iff iz = -1 \iff z = -\frac{1}{i} = i$

de plus $A(i)$ d'où A est l'unique point invariant.

c) $\forall z \neq i$; $\dfrac{z' - z}{i - z} = \dfrac{(1+i)z + 1 - z}{i - z} = \dfrac{iz + 1}{i - z} = \dfrac{i(z - i)}{i - z} = -i$

on déduit alors que $\forall z \neq i$; $z' - z = e^{-i\pi/2}(i - z)$

donc dans la rotation de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$; A a pour image M'

d'où $AM = MM'$ et $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Pour construire M', il suffit de le construire tel que le triangle MAM' soit rectangle isocèle et ind

3) a) $|z - 2| = 2 \iff |z - z_B| = 2 \iff MB = 2 \iff M \in \mathcal{C}(B, 2)$

L'ensemble cherché est le cercle de centre B et rayon 2.

b) $z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i$
$= (1+i)z - 2(1+i) = (1+i)(z - 2)$

ⓑ Soit $M \in \Sigma_1$ alors $|z-2| = \sqrt{2}$

d'où $|z'-3-2i| = |1+i||z-2|$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (car $|1+i| = \sqrt{2}$)

$\Rightarrow |z'-3-2i| = 2$ donc $M' \in \mathcal{C}(\Omega, 2)$ avec $\Omega(3+2i)$

M' est un point du cercle Σ_2 de centre $\Omega(3+2i)$ et rayon 2.

II ① $z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$ ← on utilise $(A+iB)^2 = A^2 - B^2 + 2iAB$.

$= 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

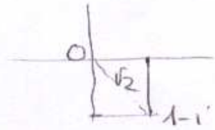
$= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

donc $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

② On a alors $z^2 = 2\sqrt{2}(1-i)$

$= 2\sqrt{2}\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

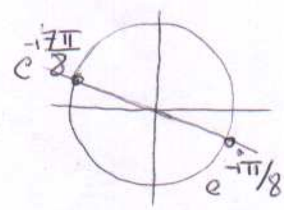
$= 4e^{-i\pi/4}$



On a $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

③ $z^2 = 4e^{-i\pi/4} \iff \begin{cases} |z^2| = 4 \\ \arg z^2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 2 \\ \arg z = -\frac{\pi}{8} + k\pi \, ; \end{cases}$

donc $z = 2e^{-i\pi/8}$ ou $z = 2e^{7i\pi/8}$



mais $\mathrm{Re}\, z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} < 0$ d'où $z = 2e^{-i\pi/8}$ est à exclure.

donc $z = 2e^{7i\pi/8}$