Devoir N° 9

9 fev 2010

(I) 1) a) $M(z)$ invariant $\iff z = \dfrac{iz+3}{z+i} \iff z^2 + iz = iz + 3$

$\iff z^2 = 3 \iff z = \sqrt{3}$ ou $z = -\sqrt{3}$

donc $J(\sqrt{3})$ et $K(-\sqrt{3})$ sont les uniques deux points invariants de f.

b) Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le point Ω d'affixe $\dfrac{-i+3i}{2} = i$

et pour rayon $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |2i| = 2$.

donc le cercle de diamètre $[AB]$ est $\mathcal{C}(\Omega, 2)$.

$J\Omega = |z_J - z_\Omega| = |\sqrt{3} - i| = 2 \implies J \in \mathcal{C}(\Omega, 2)$

$K\Omega = |z_K - z_\Omega| = |-\sqrt{3} - i| = 2 \implies K \in \mathcal{C}(\Omega, 2)$

b) $z_{C'} = \dfrac{ic+3}{c+i} = \dfrac{i(-2+i)+3}{-2+i+i} = \dfrac{2-2i}{-2+2i} = -1 \implies C'$ est un point de l'axe des abscisses

② $z' = i\,\dfrac{z-3i}{z+i} \quad \forall z \neq z_A$.

donc $\forall z \neq z_A$ et $z \neq 3i$, on a $\arg(z') = \arg i + \arg\left(\dfrac{z-3i}{z+i}\right) \quad (2\pi)$

ce qui équivaut à $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi)$

③ a) z' complexe imaginaire pur

$\iff \arg(z') = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ ou $z' = 0$

$\iff \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ ou $z = 3i$

$\iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$ ou $z = z_B$

$\iff M \in (AB) \setminus \{A, B\}$ ou $M = B \iff M \in (AB) \setminus \{A\}$

z' complexe imaginaire pur $\iff M$ est un point de $(AB) \setminus \{A\}$.

b) $M \in \mathcal{C}(\Omega, 2)$ cercle de diamètre $[AB]$ et $M \notin \{A, B\}$

donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$

donc d'après ② $\arg(z') = \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff \arg z' = 0 \quad (\pi)$

donc M' est un point de l'axe des abscisses privé de O.

(II) (1) $f(x) = \frac{1}{10} x(20-x)$; $x \in [0,20]$

(a) f polynôme $\Rightarrow f$ dérivable sur $[0,20]$

$\Rightarrow \forall x \in [0,20]$, $f'(x) = \frac{1}{10}(20-2x)$

$= \frac{1}{5}(10-x)$

Donc f' a le signe de $\overbrace{10-x}^{\text{binôme}}$ d'où le tableau de variations de f

x	0		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

$f(10) = 10$; $f(0) = 0$; $f(20) = 0$

(b) D'après le tableau de variation, 10 est le maximum de f sur $[0,20]$ (atteint en 10) et 0 est le minimum (atteint en 0 et 20)

d'où $\forall x \in [0,20]$, $f(x) \in [0,10]$.

(2) Soit P_n la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Etape 1 : $u_0 = 1$; $u_1 = f(u_0)$

$= \frac{19}{10} = 1,9$ d'où $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10 \Rightarrow P_0$ est vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

P_q vraie $\Rightarrow 0 \leq u_q \leq u_{q+1} \leq 10$

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_q) < f(u_{q+1}) \leq f(10)$ car $f \nearrow$ sur $[0,10]$

$\Rightarrow 0 \leq u_{q+1} \leq u_{q+2} \leq 10$. Donc P_{q+1} vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

(3) D'après (2) $(u_n) \nearrow$ et (u_n) majorée par 10 donc (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0,10]$.

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ cvg vers } \ell \in [0,10] \\ f \text{ continue sur } [0,10] \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(Th du pt fixe)}} \ell = f(\ell)$$

et $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \frac{1}{10}\ell(20-\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell(10-(20-\ell)) = 0 \Leftrightarrow \ell(\ell-10) = 0$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 10$ or $(u_n) \nearrow$ et $u_0 = 1$ donc $\ell = 0$ impossible d'où $\ell = 10$.