

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION BLANCHE Février 2010

MATHÉMATIQUES

Série : S

DUREE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants, le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, un résultat de cours.

On rappelle que la fonction \ln est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, positive sur $[1; +\infty[$, et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x, \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{array} \right.$$

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

1. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$$

3. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$.

Partie B

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 1]$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.

\mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
(b) En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0; 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0; 1]$, on a : $f(x) \leq 1$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0; 1]$.
(b) Vérifier que la droite T est tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0; 1]$ par

$$g(x) = 1 + x \ln x - x$$

- (a) Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0; 1]$ et dresser le tableau de variation de g .
On ne cherchera pas la limite de g en 0.
- (b) En déduire les positions relatives de la courbe \mathcal{C} et de la droite T .

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.

Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. (a) Établir que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1} .

- (b) Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée

$A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.

On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$.

(d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

(a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2n - 6$.

(c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

(d) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$,
$$g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}.$$
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) \quad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0 ; +\infty[$

$$f(t) = \exp \left[3 + C \exp \left(\frac{t}{20} \right) \right].$$

(la notation \exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp \left[3 - 3 \exp \left(\frac{t}{20} \right) \right].$$

- (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- (b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
- (c) Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?