# DS 11 - Mathématiques.

**I)** $x \longmapsto x(x^2+2)$ continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale I existe.

$$I = \int_0^1 x(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+2)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(9-4) = \frac{5}{4}$$

$x \longmapsto 2^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (exponentielle de base 2)

donc J existe et $J = \int_{-1}^{2} 2^x\,dx = \int_{-1}^{2} e^{x\ln 2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{2} \ln 2\, e^{x\ln 2}\,dx$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[e^{x\ln 2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{\ln 2}\left[2^x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{\ln 2}\left(4-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2\ln 2}$$

**II) 1) a)** $\forall x \geqslant 0,\ 2x \geqslant 0$

$\Longrightarrow e^{2x} \geqslant 1$ (car $x \mapsto e^x$ croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Longrightarrow e^x \geqslant e^{-x}$ ($\times\, e^{-x}$ avec $e^{-x} > 0$)

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ ; $x \in \mathbb{R}_+$.

$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}-e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$ et d'après a) $e^{-x}-e^x \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$

d'où comme $(e^x+e^{-x})^2 > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit $f'(x) \leqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+$

donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

d'où par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} f = 0$ (par inverse)

On déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1/2$ $\searrow$ | $0$ |

**2) a)** $f(x) = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, les bornes sont dans l'ordre ($n < n+1$)

donc d'après le th de positivité ($f$ continue) on a $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$

**b)** $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [n, n+1]$ on a $n \leqslant x \leqslant n+1$

$\Longrightarrow f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$ (car $f$ décroissante sur $[n,n+1]$)

Donc les bornes étant dans l'ordre ($n < n+1$) et les f° continues, on a par intégration de l'inégalité :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

c'est-à-dire $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} f(n+1) \leq I_n \leq f(n) \\ f(n+2) \leq I_{n+1} \leq f(n+1) \end{array}\right\} \Longrightarrow I_{n+1} \leq f(n+1) \leq I_n$$

donc $(I_n)$ décroissante

ⓓ $(I_n)$ décroissante, $(I_n)$ minorée par 0 $\Longrightarrow$ $(I_n)$ Converge par th.

III $x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\,dt$.

1 ⓐ

$\forall t \in [0, \pi/2]$, $\cos t \geq 0$ d'où $\cos t \geq 0$ sur $[0,1]$ (car $1 \leq \frac{\pi}{2}$)

donc $\forall t \in [0,1]$ ; $t^n \cos t \geq 0$

Les bornes étant dans l'ordre $(0 \leq 1)$, on a d'après le th de positivité.

$x_n = \int_0^1 t^n \cos t\, dt \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ d'où $(x_n)$ suite à termes positifs

ⓑ $\forall t \in [0,1]$ ; $t \leq 1$
$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow t^{n+1} \leq t^n$ ($\times t^n$ avec $t \geq 0$).

$\Longrightarrow t^{n+1}\cos t \leq t^n \cos t$.

Les bornes étant dans l'ordre et les fonctions continues, on a par intégration de l'inégalité

$\int_0^1 t^{n+1}\cos t\, dt \leq \int_0^1 t^n \cos t\, dt$ donc $x_{n+1} \leq x_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$

En conséquence, $(x_n)$ est une suite décroissante.

ⓒ $(x_n)$ minorée par 0 et décroissante $\Longrightarrow$ $(x_n)$ Converge (par th)

2 ⓐ $\forall t \in [0,1]$, $\cos t \leq 1$
$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow t^n \cos t \leq t^n$ ($\times t^n$ avec $t^n > 0$)

Les fonctions étant continues et les bornes dans l'ordre $(0 \leq 1)$

on a par intégration de l'inégalité. $\int_0^1 t^n \cos t\, dt \leq \int_0^1 t^n\, dt$

$\Longleftrightarrow x_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Longleftrightarrow x_n \leq \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ⓑ (1a) et (2a) montrent que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

donc d'après le th des Gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

③ ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt$

soit $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \sin t$

alors $u, v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = (n+1) t^n$ ; $v'(t) = \cos t$

$u, v, u', v'$ sont continues donc on a par intégration par parties :

$$x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt = \left[ t^{n+1} \sin t \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n \sin t \, dt$$

$$= \sin 1 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt \quad \text{(par linéarité)}.$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = \sin 1 - (n+1) y_n$

ⓑ On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \dfrac{\sin 1}{n+1} - \dfrac{x_{n+1}}{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{n+1} = 0$ ; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \to \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin 1}{n+1} = 0$

d'où par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$

④ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = (n+1) x_n - \cos 1$

d'où $n x_n = y_{n+1} - x_n + \cos 1$

et $\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n x_n = \cos 1$ (par somme)

de même, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = -(n+1) y_n + \sin(1)$

$\Rightarrow n y_n = -x_{n+1} - y_n + \sin 1$

$\left. \begin{array}{l} \lim x_{n+1} = 0 \\ \lim y_n = 0 \end{array} \right\} \to \lim\limits_{n \to +\infty} n y_n = \sin 1$ (par somme)

IV obligatoire

① $\forall n \in \mathbb{N}; \ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ d'où $(U_n)$ croissante.

(2a) $h(x) = x^2 + x \; ; \; x \in \mathbb{R}$

$h$ dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 2x+1$

$h'$ étant un binôme, on déduit le signe de $h'$ puis le tableau de variations de $h$ :

| $x$ | | $-1/2$ | |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ |

Montrons $x \in ]-1, 0[ \implies h(x) \in ]-1, 0[$.

• si $x \in ]-1 ; -\frac{1}{2}[$ ; alors $h$ décroissante donc $-1 < x < -\frac{1}{2}$

$\implies h(-1) > h(x) > h(-\frac{1}{2})$

$\implies 0 > h(x) > -\frac{1}{4} \implies h(x) \in ]-1,$

• si $x \in [-\frac{1}{2} ; 0[$ alors $h$ croissante donc

$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \implies h(-\frac{1}{2}) \leq h(x) \leq h(0)$

$\implies -\frac{1}{4} \leq h(x) \leq 0 \implies h(x) \in ]-1, 0[$

d'où $x \in ]-1, 0[ \implies h(x) \in ]-1, 0[$

(b) Soit $P_n$ la propriété $-1 < u_n < 0$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est vraie.

Etape 1 : $u_0 = a \in ]-1, 0[ \implies P_0$ vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons $P_q$ vraie et montrons $P_{q+1}$ vraie.

$u_q \in ]-1, 0[$ donc d'après (2a) $f(u_q) \in ]-1, 0[$ c'est-à-dire $u_{q+1} \in ]-1,$

donc $P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; \; -1 < u_n < 0$.

(3) $(u_n)$ croissante

$(u_n)$ majorée par $0$ $\Big\} \implies (u_n)$ converge vers $l$ telle que $l \in [-1, 0]$.

$u_{n+1} = f(u_n) \; \forall n \in \mathbb{N}$.

$(u_n)$ converge vers $l \in [-1, 0]$

$f$ continue sur $\mathbb{R}$ (donc en $l$) $\Big\} \implies f(l) = l$ d'après le th du point fixe

$f(l) = l \iff l^2 + l = l \iff l^2 = 0 \iff l = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

## (V) Spécialité

**(1)** (a) $s_1$ similitude de centre $A$ transforme $M$ en $B$ : $A \xmapsto{s_1} A$, $M \xmapsto{s_1} B$

par th le rapport de $s_1$ est $k_1 = \dfrac{AB}{AM} = \sqrt{2}$ car $ABM$ rect isocèle en $M$

et l'angle vaut $\theta_1 = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = +\dfrac{\pi}{4}$ $(2\pi)$

Car $AMB$ rect isocèle dire

de même pour $s_2$ : $O \xmapsto{s_2} O$, $B \xmapsto{s_2} N$

donc par th le rapport et l'angle de $s_2$ sont $\begin{cases} k_2 = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta_2 = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) = +\dfrac{\pi}{4} \ (2\pi) \end{cases}$

Ici on a utilisé le fait que $BNO$ rectangl isocèle direct en $N$.

(b) $r = s_2 \circ s_1$

donc $r(M) = s_2(s_1(M))$
$= s_2(B) = N$ d'où $M \xmapsto{r} N$

- $AIP$ rect isocèle direct donc

$\left.\begin{array}{l} AP = \sqrt{2}\, AI \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AP}) = +\pi/4 \end{array}\right\} \Rightarrow s_1(I) = P$

- $PIO$ rect isocèle direct donc $\left.\begin{array}{l} OI = \sqrt{2}/2\, OP \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}) = +\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow s_2(P) = I$

donc $r(I) = s_2(s_1(I)) = s_2(P) = I$ d'où $I \xmapsto{r} I$

(c) $s_1$ et $s_2$ sont deux similitudes directes de rapport et angles $\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\,;$
d'où la composée de $s_1$ et $s_2$ est par th une similitude directe de rappo

$k = k_1 k_2 = \sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$ et d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2 = +\dfrac{\pi}{2}$ $(2\pi)$

d'où $r = s_2 \circ s_1$ est une rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

$I$ étant invariant par $r$, on déduit que le centre est $I$.

(d) $IO = IP$
$(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IP}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ $\Big\} \Longrightarrow r(O) = P$

(e) $r$ rotat° d'angle $+\frac{\pi}{2}$ telle que $H \longmapsto N$, $O \longmapsto P$

d'où $(OH) \longmapsto (PN)$ et donc $(OH) \perp (PN)$.

(2) • on sait que $s_1$ a pour rapport $\sqrt{2}$ et angle $+\frac{\pi}{4}$

d'où $s_1$ a pour écriture complexe $z' = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + b$

c'est-à-dire $z' = (1+i)z + b \quad , b \in \mathbb{C}$

mais $s_1(A) = A \Longleftrightarrow 2 = (1+i)2 + b \longrightarrow b = -2i$

Donc $s_1$ a pour écriture complexe $z' = (1+i)z -$

• $s_2$ a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et angle $\pi/4$ donc $s_2$ a pour écriture complexe

$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}z + b \Longleftrightarrow z' = \frac{(1+i)}{2}z + b \quad , b \in \mathbb{C}$

et O pt fixe de $s_2$ donc $b = 0$ d'où

$s_2$ a pour écriture $z' = \frac{1+i}{2}z$.