DS 12

le 14 avril 2010

I ① $I_1 = \int_0^2 (2-x)e^x dx$

Soient u, v, u', v' définies, dérivables et continues sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2-x$; $u'(x) = -1$

$v(x) = e^x$; $v'(x) = e^x$.

par intégration par parties $I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 + \int_0^2 e^x dx$

$= -2 + [e^x]_0^2 = e^2 - 3.$

② $\forall x \in [0,2]$; $0 \leq x \leq 2$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 \leq 2-x \leq 2$ car $x \longmapsto 2-x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 \leq (2-x)^n \leq 2^n$ car $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{(2-x)^n}{n!}e^x \leq \frac{2^n}{n!}e^x$ ($\times \frac{e^x}{n!}$ avec $\frac{e^x}{n!} > 0$)

les bornes sont dans l'ordre $(0 \leq 2)$

donc par intégration de l'inégalité $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}\int_0^2 e^x dx$

d'où $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$

③ $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{(2-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^2 (2-x)^{n+1}e^x dx$ (par linéarité)

soit u, u', v, v' dérivables et continues sur $\mathbb{R}$ définies par

$u(x) = (2-x)^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)(2-x)^n \times (-1)$

$v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$

d'où par intégration par parties, $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}[(2-x)^{n+1}e^x]_0^2 + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^2 (n+1)(2-x)^n e^x dx$

Donc $I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x dx$

$= -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$

④ Soit P_n la propriété $e^2 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie

- pour $n = 1$: $e^2 = I_1 + 3$

$= 1 + \frac{2}{1!} + I_1$ donc P_1 est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

$I_{k+1} = I_k - \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$ d'après ③ mais puisque P_k vraie $I_k = e^2 - 1 - \frac{2}{1!} - \cdots - \frac{2^k}{k!}$

d'où $I_{k+1} = e^2 - 1 - \frac{2}{1!} - \cdots - \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{k+1}}{k+1}$

$\Rightarrow e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{k+1}}{k+1} + I_{k+1}$ d'où P_{k+1} est vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

(II) $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$; $x > 1$.

(1) f dérivable sur $]1, +\infty[$ d'après les règles de dérivation.

et $\forall x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1/x}{(\ln x)^2}$

$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2}\right)$

pour $x > 1$; $\frac{1}{x} > 0$ et $\frac{1}{(\ln x)^2} > 0$ d'où $\forall x > 1$, $f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On a $\lim\limits_{1^+} \ln = 0^+$

d'où par inverse $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

$\rightarrow \lim\limits_{0} f = -\infty$

de m̂ on montre que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

(2)(a) $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x}$ $\forall x > 1$.

$\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$ d'où par inverse $\lim\limits_{+\infty}(f - \ln)$

$\Rightarrow \Gamma$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

(b) La position relative de $\mathcal{C}$ et Γ est donnée par le signe de

$h(x) = f(x) - \ln x$.

$= -\frac{1}{\ln x}$

et pour $x > 1$; $\ln x > 0$ et donc $-\frac{1}{\ln x} < 0$.

d'où $h(x) < 0$ et donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Γ.

(3)(a) Soit $a \in \mathbb{R}$

la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation

$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Donc $O \in T_a \Leftrightarrow 0 = f'(a)(-a) + f(a) \Leftrightarrow f(a) - a f'(a) = 0$.

(b) $\forall x > 1$; $g(x) = f(x) - x f'(x)$

$= \ln x - \frac{1}{\ln x} - x \times \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2}\right)$

d'où $\forall x>1 \quad g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{(\ln x)^2}$

$$= \frac{1}{(\ln x)^2}\left((\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1\right)$$

d'où $g(x)=0 \iff (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0.$

c) $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$

u dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$

u' polynôme de degré 2

$\Delta = 16$ donc u' admet deux racines $t_1 = \frac{2+4}{6} = 1$; $t_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$

d'où le signe de u' :

t		$-1/3$		1	
$u'(t)$	+	0	−	0	+

on déduit le tableau de variations de u :

t		$-1/3$		1	
$u'(t)$	+	0	−	0	+
$u(t)$	$-\infty \nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

$u(-1/3) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1$

$= \frac{-1-3+9-27}{27} = \frac{-22}{27}$

$\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} u = -\infty$ (par th).

$-\frac{22}{27}$ est le maximum de u sur $]-\infty ; 1]$ d'où $u(t) < 0$ sur $]-\infty ; 1]$.

et u n'admet pas de racines sur $]-\infty ; 1]$.

Sur $[1, +\infty[$ $\left.\begin{array}{l} u \text{ est strictement croissante} \\ u(1) = -2 < 0 \;;\; \lim\limits_{+\infty} u = +\infty \\ u \text{ est continue car dérivable} \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après le th de la bijection $u(t)=0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.

En conclusion, u s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ pour une valeur $t_0 > 1$

d) T_a passe par l'origine $\iff f(a) - af'(a) = 0$

$\iff g(a) = 0$

$\iff (\ln a)^3 - (\ln a)^2 - (\ln a) - 1 = 0$

$\iff u(\ln a) = 0$

$\iff \ln a = t_0$ où t_0 est l'unique racine de u

$\iff a = e^{t_0}$

d'où il existe une seule tangente passant par l'origine.

III Partie I :

① $f(x) = \ln(1+x) - x$; $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

f, g dérivables sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$

$= \frac{-x}{1+x}$ $= \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$

. $x \geq 0$ d'où $f'(x) \leq 0$ (par quotient.)

et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

. $x \geq 0$ d'où $\frac{x^2}{1+x} \geq 0 \Longrightarrow g'(x) \geq 0 \Longrightarrow$ g est croissante sur $\mathbb{R}_+$

②. f décroissante sur $\mathbb{R}_+ \Longrightarrow \forall x \geq 0$ $f(x) \leq f(0)$

$\Longleftrightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \Longleftrightarrow \ln(1+x)$

. g croissante sur $\mathbb{R}_+ \Longrightarrow \forall x \geq 0$ $g(x) \geq g(0)$

$\Longleftrightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$

$\Longleftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

d'où $\forall x \geq 0$ $x \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$

Partie II.

$u_1 = \frac{3}{2}$; $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

① Soit P_n la propriété $u_n > 0$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie

Etape 1 : $u_1 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow P_1$ vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

$u_{q+1} = u_q\left(1 + \frac{1}{2^{q+1}}\right)$ et $u_q > 0$ car P_q vraie

d'où par produit P_{q+1} vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$.

② Soit P_n la propriété $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

Montrons par récurrence que P_n est vraie $\forall n \geq 1$

Etape 1 pour $n = 1$; $\ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(1 + 1/2) \Longrightarrow P_1$ est vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$ supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

$$\ln u_{q+1} = \ln\left(u_q\left(1+\frac{1}{2^{q+1}}\right)\right)$$

$$= \ln(u_q) + \ln\left(1+\frac{1}{2^{q+1}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^{q+1}}\right)$$

donc P_{q+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

③ d'après la partie I

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \ln(1+1/2) \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \leq \ln(1+1/2^2) \leq 1/2^2$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \leq \ln(1+1/2^n) \leq 1/2^n$$

Donc par somme membre à membre

$$S_n - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right) \leq \ln u_n \leq S_n$$

$$\iff S_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) \leq \ln u_n \leq S_n$$

d'où $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

④ $\forall q \neq 1$ on a $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

d'où $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-1/2^n}{1-1/2}\right) = 1 - 1/2^n$$

et $T_n = \frac{1}{4}\left(1+1/4+\cdots+1/4^{n-1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-1/4^n}{1-1/4}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}(1-1/4^n)$

$$= \frac{1}{3}(1-1/4^n)$$

et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\left|\frac{1}{4}\right| < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

et donc par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$

5 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n$

$= u_n \times \frac{1}{2^{n+1}}$ et d'après ① $u_n > 0$

d'où par produit $u_{n+1} - u_n > 0$

$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ et donc (u_n) croissa

b) (S_n) est une suite croissante convergente vers 1

donc $S_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_*$

d'après ③ $\ln u_n \leq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \ln(u_n) \leq 1$ et donc $u_n \leq e$ car exp strict ↑

(u_n) est croissante, (u_n) est majorée par 1 donc (u_n) converge

c) (u_n) converge vers $\ell \geq u_1 = \frac{3}{2}$ (car $(u_n) \uparrow$)

$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^*\end{array}\right\} \Rightarrow (\ln u_n)$ converge vers $\ln \ell$ (par th)

En appliquant le résultat admis et le ④ on obtient

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} T_n \leq \ln \ell \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{6} \leq \ln \ell \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$

IV ① a) $z_A = 1 + i\sqrt{3}$

$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 = 2 \cdot e^{i\pi/3}$

$z_B = 2i = 2\, e^{i\pi/2}$

b) voir figure

c) $OA = |z_A| = 2$; $OB = |z_B| = 2 \Rightarrow OAB$ isocèle en O.

② a) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/3}} = e^{i(\pi/2 - \pi/3)} = e^{i\pi/6}$.

d'où $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{6} \ (2\pi)$

On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{6} \ (2\pi)$.

on déduit que la rotation r a pour angle $\frac{\pi}{6}$.

b) r rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6} \Rightarrow r$ a pour écriture complexe

$z' = e^{i\pi/6} z$

③ ⓐ Γ cercle de centre A et rayon $OA=2$
r rotation $\Big\} \Rightarrow$ $r(\Gamma)$ cercle de centre $r(A)=$ et de même rayon 2

donc $r(\Gamma)$ de centre B et rayon 2 $\Longrightarrow$ $r(\Gamma)=\Gamma'$

ⓑ $z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{1}{2}\left(1+i(\sqrt{3}+2)\right)$

ⓒ $C\in\Gamma$; $O\in\Gamma$
Γ cercle de centre B $\Big\} \Rightarrow BC = BO$.

$C\in\Gamma'$; $O\in\Gamma'$
Γ' cercle de centre A $\Big\} \Rightarrow AC = AO$

d'où $BC = BO = AC = AO$ (car $OA = OB$ d'après ①)

$\rightarrow$ OACB est un losange.

ⓓ I milieu $[AB]$
OACB losange $\Big\} \Rightarrow$ I centre du losange $\Rightarrow$ I milieu de $[OC]$

d'où $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ et donc $z_C = 2z_I \iff z_C = 1+(2+\sqrt{3})i$

④ ⓐ $AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3}-(1+i\sqrt{3})|$
$= |i\sqrt{3}-1| = \sqrt{1+3} = 2 = OA$

$\Rightarrow D\in\Gamma$

ⓑ $r(D)$ a pour affixe $z'_D = e^{i\pi/6} z_D$
$= e^{i\pi/6}\times 2i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{i(\pi/6+\pi/2)}$
$= 2\sqrt{3}\, e^{4i\pi/6} = 2\sqrt{3}\, e^{2i\pi/3}$
$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
$= 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}(-1+i$

donc $D'(-\sqrt{3}+3i)$

⑤ $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D$
$= 1+(2+\sqrt{3})i - 2i\sqrt{3}$
$= 1+(2-\sqrt{3})i$

$z_{\overrightarrow{DD'}} = z_{D'} - z_D$
$= -\sqrt{3}+3i - 2i\sqrt{3}$
$= -\sqrt{3}+i\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

d'où $z_{\overrightarrow{DD'}} = -\sqrt{3}\, z_{\overrightarrow{DC}} \Rightarrow \overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires $\Rightarrow$ D, D', C alignés.

IV Spécialité

① $z' = (2-2i)z + 1$

On reconnait l'écriture complexe d'une similitude directe d'angle et de rapport

$\theta_f = \arg(2-2i)$ et $k_f = |2-2i|$

or $2-2i = 2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ d'où $k_f = 2\sqrt{2}$ et $\theta_f = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

le centre de f est le point invariant $\Omega(\omega)$

$\omega = (2-2i)\omega + 1 \iff (1-2i)\omega + 1 = 0 \iff \omega = \frac{-1}{1-2i} = -\frac{1+2i}{5}$

②ⓐ B' image de B par f

donc $z_{B'} = (2-2i)(-4+2i) + 1$

$= -4 + 12i + 1 = -3 + 12i$

ⓑ $\overrightarrow{CB'}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\+1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CB'}\cdot\overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow (CB') \perp (CA)$

③ $z_{M'} = (2-2i)(x+iy) + 1$

$= 2x+2y + i(2y-2x) + 1$ donc $\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix}2x+2y+1-1\\2(y-x)-4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix}2x+2y\\2y-2x-4\end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{CM'}\cdot\overrightarrow{CA} = (2x+2y)\times 2 + 2y - 2x - 4$

$= 2x + 6y - 4$

donc $\overrightarrow{CM'} \perp \overrightarrow{CA} \iff 2x + 6y - 4 = 0$

$\iff x + 3y - 2 = 0 \iff x + 3y = 2.$ (E)

④ⓐ $-4 + 3\times 2 = 2 \Rightarrow (-4;2)$ solution de (E).

ⓑ $\left.\begin{matrix} x+3y=2 \\ -4+3\times 2 = 2\end{matrix}\right\} \Rightarrow x+4+3(y-2) = 0$ d'où $3(2-y) = x+4$

$\Rightarrow$ 3 divise $x+4$

$\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x+4 = 3k$

On a alors $3(2-y) = 3k$ d'où $2-y = k$

donc $x = 3k-4$ et $y = 2-k$

Vérifions que $(3k-4, 2-k)$ est solution : $x+3y = 3k-4+3(2-k)$
$= 2$

d'où $S = \{(3k-4;2-k), k\in\mathbb{Z}\}$

ⓒ $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{CM'} \perp \overrightarrow{CA}$

$\iff x+3y = 2 \iff \begin{cases} x = 3k-4 \\ y = 2-k\end{cases}$

on veut de plus $(x,y) \in [-5;5]^2 \iff \begin{cases} -5 \leq 3k-4 \leq 5 \\ -5 \leq 2-k \leq 5\end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq k \leq 3 \\ -3 \leq k \leq 7\end{cases}$

d'où $k \in \{0,1,2,3\}$ les points correspondants sont

$M_0(-4;2)$; $M_1(-1;1)$; $M_2(2;0)$, $M_3(5;-1)$