TS5 4 mai 2010

DS 13 - Mathématiques (2h)

(I) ① T loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

ⓐ par th. $p(T \leq 10) = 1 - e^{-10\lambda}$

d'où $p(T \leq 10) \iff 1 - e^{-10\lambda} = 0,7$

$\iff e^{-10\lambda} = 0,3$

$\iff -10\lambda = \ln 0,3 \iff \lambda = -\frac{1}{10}\ln 0,3$

ⓑ T loi exponentielle donc par th, T est une loi de durée de vie sans vieillissement d'où

$P_{(T>10)}(T>15) = P(T>5) = e^{-5\lambda}$

ⓒ On recherche $P_{(T>10)}(T \leq 15)$.

$P_{T>10}(T \leq 15) = 1 - P_{T>10}(T>15) = 1 - e^{-5\lambda} \simeq 0,45$ à $0,01$

② ⓐ. On considère l'exp de Bernoulli suivante : on prend une caisse et l'issue succès est "l'attente est supérieure à 10 mn" avec pour probabilité $p(T>10) = 0,3$.

- Il y a 6 caisses dont la durée d'attente est indépendante de celle des autres caisses
- Y nbre de caisses pour lesquelles on a l'issue succès, c'est à dire nbre de caisses dont le temps d'attente est supérieur à 10 mn.

Alors par th Y suit une loi binomiale de paramètre 6, 0,3 : $Y = \mathcal{B}(6 ; 0,3)$

ⓑ $p(Y \geq 4) = p(Y=4) + p(Y=5) + p(Y=6)$

$= \binom{6}{4} 0,3^4 0,7^2 + \binom{6}{5} 0,3^5 \cdot 0,7 + \binom{6}{6} 0,3^6 = 15 \cdot 0,3^4 0,7^2 + 6 \cdot 0,3^5 0,7 + 0,3^6$

$\simeq 0,07$ à $0,01$.

La probabilité que le client ouvre de nouvelles caisses est de. 0,07

(II) ① p_1, p_2, p_3, p_4 suite arithmétique.

Soit r la raison, alors $p_2 = p_1 + r$; $p_3 = p_1 + 2r$; $p_4 = p_1 + 3r$.

et de plus $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \iff 4p_1 + 6r = 1$

On a donc le système $\begin{cases} p_1+3x=4 \\ 4p_1+6x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1+3x=0,4 \\ 4p_1+6x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1+3x=0,4 \\ 2p_1=0,2 \end{cases}$ (L_2-2L_1)

$\iff \begin{cases} p_1=0,1 \\ x=0,1 \end{cases}$

d'où $p_1=0,1$; $p_2=0,2$; $p_3=0,3$.

② ⓐ Si (a,b,c) est un triplet de résultat possible en lançant 3 fois le dés alors les lancers étant indépendants, on déduit que

$p((a,b,c)) = p(\text{"faire } a\text{"}) \times p(\text{"faire } b\text{"}) \times p(\text{"faire } c\text{"})$.

ainsi $p((1,2,4)) = p_1 \times p_2 \times p_4 = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$

ⓑ Les triplets croissants dans l'ordre sont $(1,2,4)$; $(1,3,4)$, $(1,2,3)$, $(2,3,4)$.

la probabilité cherchée est la somme des probabilités associée à chacun de ces évènements.

$p = p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4 = 0,05$

③ ⓐ
- On a une experience de Bernoulli qui consiste à lancer le dé et dont l'issue succès est faire 4 avec une probabilité de 0,4
- On répète cette experience 10 fois de manière indépendante.
- X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

par th X suit une loi binomiale de paramètre 10 ; 0,4 : $X = B(10, 0,4)$

On a donc $P(X=i) = \binom{10}{i} 0,4^i \times 0,6^{10-i}$

ⓑ Par th (X étant une loi binomiale), $E(X) = 10 \times 0,4 = 4$

ⓒ $P(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,6^{10} = 0,994$ (à 10^{-3})

④ U_n "obtenir le premier 4 au $n^{ième}$ lancer"

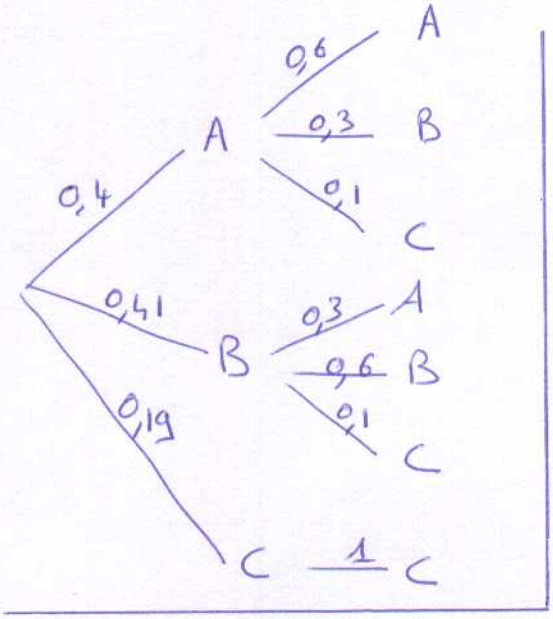
U_n se réalise $\iff$ pas de 4 lors des $n-1$ premiers lancers et un 4 au lancer. Les lancers étant indépendants, on a

$p(U_n) = (1-p_4)^{n-1} \times p_4$

$= 0,6^{n-1} \times 0,4$ $\Rightarrow (U_n)$ suite géométrique de raison 0,6 et 1er terme $U_1 = 0,4$.

$|0,6| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

III ①



② A_0, B_0, C_0 forment une partition de l'univers donc par th (probabilité totale).

$$p(A_1) = p(A_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_1) + p(C_0 \cap A_1)$$
$$= p(A_0) \times p_{A_0}(A_1) + p(B_0) \times p_{B_0}(A_1) + p(C_0) \times p_{C_0}(A_1)$$
$$= 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}41 \times 0{,}3 + 0{,}19 \times 0$$
$$= 0{,}363.$$

Donc $p_1 = 0{,}363$

de même pour $p(B_1)$: on obtient

$q_1 = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}41 \times 0{,}6 = 0{,}366$

ainsi que pour $r_1 = p(C_1) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}41 \times 0{,}1 + 0{,}19 = 0{,}271$

ⓑ A_n, B_n, C_n forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a.

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) + p(A_{n+1} \cap C_n)$$
$$= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(A_{n+1})$$
$$= p_n \times 0{,}6 + q_n \times 0{,}3 + r_n \times 0$$
$$= 0{,}6\, p_n + 0{,}3\, q_n.$$

De même $q_{n+1} = p(B_{n+1}) = p(B_{n+1} \cap A_n) + p(B_{n+1} \cap B_n) + p(B_{n+1} \cap C_n)$
$$= p(A_n) \times p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(B_{n+1})$$
$$= p_n \times 0{,}3 + q_n \times 0{,}6$$

on a donc bien le système cherché : $\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6\, p_n + 0{,}3\, q_n \\ q_{n+1} = 0{,}3\, p_n + 0{,}6\, q_n. \end{cases}$ ∀

③ ⓐ

$\forall n \in \mathbb{N}$; $S_{n+1} = p_{n+1} + q_{n+1}$
$= 0{,}9\, p_n + 0{,}9\, q_n = 0{,}9\, S_n \implies (S_n)$ géométrique de raison 0,9 et de premier terme $S_0 = 0{,}81$

ⓑ $|0{,}9| < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$
$|0{,}3| < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0$

ⓒ $\begin{cases} S_n = p_n + q_n \\ D_n = q_n - p_n \end{cases} \iff \begin{cases} q_n = \dfrac{S_n + D_n}{2} \\ p_n = \dfrac{S_n - D_n}{2} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d'après les règles sur les limites on déduit
$\lim p_n = 0$; $\lim q_n = 0$.

Et $r_n = 1 - p_n - q_n \implies \lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 1$! (No

III (spécialité)

① ⓐ O et A distincts, I et C distincts $\Longrightarrow$ par th, il existe une unique similitude s telle que $O \mapsto I$ et $A \mapsto C$.

ⓑ s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$

$s(O) = I \Rightarrow 1+i = b$ d'où $z' = az + 1 + i$

$s(A) = C \Rightarrow 2i = a \times 1 + 1 + i \Longrightarrow a = i - 1 = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$

Donc l'écriture complexe de s est $z' = (i-1)z + 1 + i$

le centre d'affixe w est invariant : $w = (i-1)w + (1+i)$

$\Longleftrightarrow w(2-i) = 1+i \Longleftrightarrow w = \dfrac{1+i}{2-i} = \dfrac{(1+i)(2+i)}{5}$

$= \dfrac{1+3i}{5}$

Donc s similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{1+3i}{5}\right)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $+\frac{3\pi}{4}$.

ⓒ Γ cercle de centre A passant par O a pour rayon $OA = |z_A| = 1$

et $A\Omega = |z_\Omega - z_A| = \left|\dfrac{3i-4}{5}\right| = \dfrac{1}{5}\sqrt{25} = 1 \Longrightarrow \Omega \in \Gamma$

② par f, A a pour image le point d'affixe $a' = \dfrac{-3+4i}{5} + \dfrac{8+4i}{5}$

$= \dfrac{5}{5} = 1 = z_A$

$\Longrightarrow f(A) = A$.

par f, C a pour image le point d'affixe $c' = \dfrac{-3-4i}{5}(-2i) + \dfrac{8+4i}{5}$

$= \dfrac{1}{5}(+6i - 8 + 8 + 4i) = 2i = z_C$

$\Longrightarrow f(C) = C$.

donc f est une similitude indirecte ayant deux points fixes A et C

$\Longrightarrow$ f est une réflexion d'axe (AC).

l'image de $\Omega(\frac{1+3i}{5})$ par f est le point d'affixe

$$w' = \frac{-3-4i}{5} \times \frac{1+3i}{5} + \frac{8+4i}{5}$$

$$= \frac{1}{25}(-15+5i+4+20i) = \frac{25+25i}{25} = 1+i = z_I \text{ donc } f(\Omega) = I$$

ⓑ voir dessin.

③ ⓐ $\Omega' = f(\Omega) = \Omega$ donc Ω'' est le point tel que

$\overrightarrow{\Omega'\Omega''} = \overrightarrow{\Omega\Omega}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \vec{0}$ $\longrightarrow$ $\Omega'' = \Omega$

ⓑ $A' = f(A) = C$ donc A'' est le point tel que

$\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{\Omega A} \iff \overrightarrow{CA''} = \overrightarrow{\Omega A}$ donc A'' image de C par la translat° de vec

ⓒ $M(z) \Rightarrow M'((i-1)z+1+i)$

donc $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{M'M''}$

$$\iff z''-z' = z - z_\Omega$$

$$\iff z'' = z+z'-z_\Omega$$

$$\iff z'' = z+(i-1)z+1+i-\frac{1+3i}{5}$$

$$\iff z'' = iz + \frac{4+2i}{5}$$

On reconnait l'écriture d'une similitude directe de rapport $|i| = 1$ et d'angle $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$
Nous avons vu en ⓐ que Ω fixe. Donc M'' est l'image de M par la similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et rapport 1. Soit u cette similitude.

ⓓ M décrit $\Gamma \Rightarrow M'' = u(M)$ décrit $u(\Gamma)$.

Γ a pour centre A ; $u(A) = A''$
u a pour rapport 1.
Γ a pour rayon 1

$\Rightarrow u(\Gamma) = \Gamma''$ cercle de centre A'' et rayon 1
(et passe par Ω)