TS 5. 14 mai 2010

DS 14

① $A(2,1,3)$; $B(-3,-1,7)$; $C(3,2,4)$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non proportionnelles $\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}$ non colinéaires $\Rightarrow A, B, C$ non alignés.

② ⓐ (d) $\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

(d) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

et $\vec{u}.\vec{AB} = -10+6+4 = 0$; $\vec{u}.\vec{AC} = 2-3+1 = 0$

d'où $\vec{u} \perp \vec{AB}$; $\vec{u} \perp \vec{AC}$ donc $\vec{u} \perp (ABC) \Longrightarrow (d) \perp (ABC)$.

ⓑ $\vec{u}$ vecteur normal à (ABC) donc (ABC) s'écrit de la forme

$(ABC) : 2x - 3y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

et $A(2,1,3) \in (ABC) \Rightarrow 4-3+3+d = 0 \Rightarrow d = -4$

d'où $(ABC) : 2x - 3y + z + 4 = 0.$

③ ⓐ $H \in (ABC) \cap (d)$ avec $H(x,y,z) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -7+2t \,;\, y = -3t \,,\, z = 4+t \\ 2x - 3y + z - 4 = 0. \quad (*) \end{cases}$

on a $(*) \Leftrightarrow 2(-7+2t) + 9t + 4 + t - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ donc $H(-5 ; -3 ; 5)$

Soit H' barycentre de $(A,-2)$; $(B,-1)$; $(C,2)$; par th $x_{H'} = (-2x_A - x_B + 2x_C) \times (-1)$
$= (-4+3+6)(-1) = -5$

et $y_{H'} = (-1) \times (-2+1+4) = -3$

$z_{H'} = (-1) \times (-6-7+8) = +5$ d'où $H = H'$

donc H est le barycentre de $\{(A,-2) ; (B,-1) ; (C,2)\}$.

ⓑ d'après la propriété fondamentale, $\forall M$

$-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = -\vec{MH}$

d'autre part $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$ (Chasles)

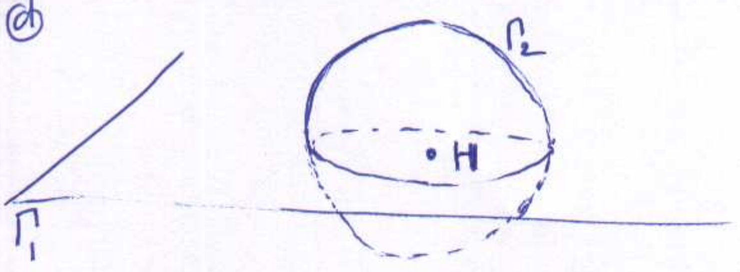
d'où $M \in \Gamma_1 \iff -\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB} = 0$

$\iff \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB} = 0$ donc Γ_1 est le plan contenant H orthogonal

ⓒ $M \in \Gamma_2 \iff \|-\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{29} \iff MH = \sqrt{29}$

donc Γ_2 sphère de centre H et de rayon $\sqrt{29}$

ⓓ



Γ_1 plan contenant H.
Γ_2 sphère de centre H

donc $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est un cercle de centre et de rayon $\sqrt{29}$

ⓔ $S \in \Gamma_1 \iff \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{CB} = 0$.

$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{CB} = -18 + 12 + 6 = 0 \Rightarrow S \in \Gamma_1$

$S \in \Gamma_2 \iff SH = \sqrt{29}$ et $SH^2 = 9 + 16 + 4 = 29 \Rightarrow S \in \Gamma_2$

d'où $S \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$