I ① $\vec{u_1}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = -4+3+1=0 \Rightarrow \mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$. VRAI

② $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$ vect. dir de $\mathcal{D}$ donc normal à $\mathcal{P}$ $\rightarrow$ $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \perp \mathcal{P}$

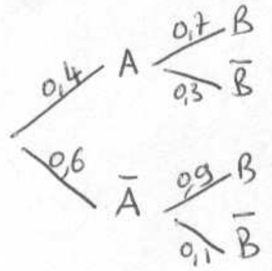
Donc $\mathcal{P}: 2x+y-z+d=0$; $d\in\mathbb{R}$ et $A\in\mathcal{P}$ donc $4-1-3+d=0 \Rightarrow d=0$

$\Rightarrow \mathcal{P}: 2x+y-z=0$ VRAI

③ $P(X>2000) = e^{-2000\lambda}$ d'après le cours.

$= 0,548$ FAUX

④



L'arbre s'obtient à l'aide des données de l'énoncé.

On a alors $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)\times P(A)}{P(B)} = \dfrac{0,7\times 0,4}{P(B)}$

et $P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$

$= 0,4\times 0,7 + 0,6\times 0,9 = 0,82$

Donc $P_B(A) = \dfrac{14}{41}$ VRAI

II ① $M'=M \Leftrightarrow z(z+1)=iz \Leftrightarrow z=0$ ou $z+1=i$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=-1+i$

Les points $O(0)$ et $M(-1+i)$ sont invariants par f

② $z' = \dfrac{iz}{z+1} \rightarrow |z'| = \dfrac{|iz|}{|z+1|} \rightarrow |z'| = \dfrac{|z|}{|z+1|}$ donc $OM' = \dfrac{OM}{AM}$

et $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{iz}{z+1}\right)$

$= \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM})$

③ ⓐ Voir figure.

ⓑ $b' = \dfrac{ib}{b+1} = \dfrac{i(-\frac{1}{2}+i)}{\frac{1}{2}+i} = \dfrac{-1-i/2}{\frac{1}{2}+i} = \dfrac{-2-i}{1+2i} = \dfrac{-(2+i)(1-2i)}{5}$

$= -\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

$|b|^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow |b|=1$

$\rightarrow B\in\mathcal{C}$.

ⓒ $M\in\Delta \Leftrightarrow OM=AM$ donc d'après ② $OM' = \dfrac{OM}{AM} = 1 \Rightarrow M'\in\mathcal{C}$.

ⓓ $C\in\Delta \Rightarrow C\in\mathcal{C}$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OC'}) = (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CO}) + \dfrac{\pi}{2}$ (2π)

$= -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ (2π)

$= \dfrac{\pi}{6}$. d'où la construct° de C'

④ ⓐ Soit $z = x+iy$; $x,y\in\mathbb{R}$

$z' = \dfrac{i(x+iy)}{x+iy+1} = \dfrac{(ix-y)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \dfrac{-y(x+1)+xy+i(x(x+1)+y^2)}{(x+1)^2+y^2}$ d'où $\mathrm{Im}(z') = \dfrac{y^2+x^2+x}{(x+1)^2+y^2}$

$M \notin \{O,A\}$ et $M' \in (Ox) \iff M \notin \{O,A\}$ et $\text{Im}(z') = 0$

$\iff M \notin \{O,A\}$ $x^2+y^2+x=0$

$\iff M \notin \{O,A\}$ et $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = \frac{1}{4}$

$\iff M \notin \{O,A\}$ et $M \in \mathcal{C}(\Omega, \frac{1}{2})$ avec $\Omega(-\frac{1}{2};0)$

donc Γ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2},0)$ et rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A.

(b) $M \in \{O,A\}$ et $M' \in (Ox) \iff M \notin \{O,A\}$ et $\arg(z') = 0\ (\pi)$ ou $z'=0$

$\iff M \notin \{O,A\}$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} = 0\ (\pi)$ ou $z=0$

$\iff M \notin \{O,A\}$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = -\frac{\pi}{2}\ (\pi)$

d'où M point du cercle de diamètre [OA] privé de O et A.

II Spécialité.

(1) (a) voir figure.

(b) $AB = |b-a| = |-2+i| = \sqrt{5}$ $NM = |2-4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = |c-a| = |1+2i| = \sqrt{5}$ $NP = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$CB = |b-c| = |-3-i| = \sqrt{10}$. $MP = |2-6i| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

(c) donc ABC et MNP semblables avec un rapport de 2.

(2) (a) $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$

c'est l'écriture d'une similitude directe.

l'image de A est donnée par $a' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(1+i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$

$= \frac{25}{5} + \frac{-14+9}{5}i = 5-i = n$

donc A a pour image N.

l'image de B est donnée par $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(-1+2i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$

$= \frac{22+23}{5} + \frac{-4+9}{5}i = 9+i = p$ donc $B \xmapsto{s} P$

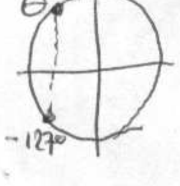
donc l'écriture données est bien celle de la similitude directe transformant A en N et B en P.

(b) Soit $A = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$ alors $|A| = \frac{1}{5}\sqrt{36+64} = 2$.

et $A = 2\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)$, donc en notant $\theta = \arg A\ (2\pi)$ on a $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$\sin\theta = -\frac{4}{5}$

A l'aide de la calculatrice, on a $\theta \simeq 127°$



mais $\cos\theta < 0$; $\sin\theta < 0$ donc on fait $\theta = -127°$.

L'angle de s est donc de $-127°$ et le rapport de 2.

le centre est donné par le point fixe dont l'affixe satisfait.

$$z = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i \iff (11+8i)z = 23+9i$$

$$\iff z = \frac{23+9i}{11+8i} = \frac{(23+9i)(11-8i)}{185}$$

$$= \frac{65}{37} - i\frac{17}{37}$$

③ ⓐ L'image de A par s' a pour affixe $a' = 2i\bar{a} + 3 - 3i$

$= 2i(1-i) + 3 - 3i$

$= 2i + 2 + 3 - 3i = 5 - i = n \Rightarrow s'(A) = N$

image de B : $b' = 2i(-1+2i) + 3 - 3i$

$= -2i + 4 + 3 - 3i = 7 - 5i = M \Rightarrow s'(B) = M$

image de C : $c' = 2i(2-3i) + 3 - 3i$

$= 4i + 6 + 3 - 3i = 9 + i = P. \rightarrow s'(C) = P$

ⓑ $k = 1 - i$ est point fixe, en effet $k' = 2i\bar{k} + 3 - 3i$

$= 2i(1+i) + 3 - 3i$

$= 2i - 2 + 3 - 3i = 1 - i = k.$

$\Rightarrow$ K invariant.

Unicité :

Supposons que $K(k)$ et $Q(q)$ sont deux points fixes.

alors $\left.\begin{array}{l} k = 2i\bar{k} + 3 - 3i \\ q = 2i\bar{q} + 3 - 3i \end{array}\right\} \Rightarrow k - q = 2i(\bar{k} - \bar{q}) \Rightarrow |k-q| = 2|k-q|$

$\Rightarrow |k-q| = 0 \Rightarrow k = q \Rightarrow K = Q$

d'où l'unicité.

ⓒ $f = s' \circ h$

donc $f(K) = s'(h(K)) = s'(K) = K$ car K centre de h et K invariant par s.

d'autre part, h a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(z - 1 + i) + 1 - i$

donc $J(2)$ a pour image par h le point d'affixe $j' = \frac{1}{2}(1+i) + 1 - i = +\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

et l'image de $J'(j')$ par s' a pour affixe $j'' = 2i\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) + 3 - 3i$

$= 3i - 1 + 3 - 3i = 2$

d'où $f(J) = J$

On déduit J, K invariants par s' et s' indirecte donc $s' \neq id \Rightarrow$ s' reflexion d'axe (JK)

ⓓ on a alors $f = s' \circ h \Rightarrow s' = f \circ h^{-1}$

donc s' composée de l'homothétie de centre K et rapport 2 suivie de la reflexion f d'axe (JK)

III ① on lit sur le graphique $a = -1,2$ et $b = +1$

② Soit $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = -x^2 - 1$; f_1 et f_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = e^x$ et $f_2'(x) = -2x$.

On déduit donc que $\mathcal{T}_A$ a pour équation $\mathcal{T}_A : y = f_1'(a)(x-a) + f_1(a)$

d'où $\mathcal{T}_A : y = e^a(x-a) + e^a$

et $\mathcal{T}_B : y = f_2'(b)(x-b) + f_2(b)$, d'où $\mathcal{T}_B : y = -2b(x-b) - b^2 - 1$

ⓒ $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ sont confondues si le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine sont éga[ux]

d'où $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ confondues $\iff \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$

ⓓ

$$S \iff \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} \underset{\text{Car } b = -\frac{e^a}{2}}{\iff} \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = \frac{e^{2a}}{4} - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

③

ⓐ $\forall x \leq 0$, $e^x \leq 1 \implies e^{2x} \leq 1$ d'où $e^{2x} - 4 \leq -3 < 0$

$\forall x \leq 0$; $x - 1 < 0$ et $e^x > 0$ d'où par produit $4e^x(x-1) < 0$.

ⓑ donc $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$
$= e^{2x} - 4 + 4e^x(x-1)$

Donc par somme et d'après ③ⓐ $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ d'où (E) n'a pas de sol° sur $]-\infty$,

ⓒ f dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après les règles de dérivation.

et $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x$
$= 2e^{2x} + 4xe^x$
$= 2e^x(e^x + 2x)$

et $\left.\begin{array}{l} 2e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \\ e^x + 2x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right\} \implies f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ (par somme)

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

ⓓ $f(x) = e^{2x} + e^x(4x - 1) - 4$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty ; \lim_{x\to+\infty} 4x - 1 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} e^x(4x-1) = +\infty$ donc par somme $\lim_{+\infty} f = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ strictement croissante sur } [0,+\infty[. \\ f(0)=-7\ ;\ \lim\limits_{+\infty} f=+\infty. \\ 0\in[-7;+\infty[\\ f \text{ continue sur } [0,+\infty[\text{ (car dérivable)} \end{array}\right\}$ d'après le th de la bijection $\Longrightarrow$ il existe a unique $a\geqslant 0$ tel que $f(a)=0$.

A l'aide de la calculatrice $f(0,84)<0$; $f(0,85)>0$ d'où $a\in]0,84;0,85[$.

④ d'après (2d) $b=\dfrac{e^a}{-2}$

d'où $0,84<a<0,85 \Rightarrow e^{0,84}<e^a<e^{0,85}$ (car $x\longmapsto e^x \nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow -\dfrac{e^{0,85}}{2}<b<-\dfrac{e^{0,84}}{2}$ $\left(\times\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ avec } -\frac{1}{2}<0\right)$

donc $-1,2<b<-1,1$ encadrement à 10^{-1} de b

(IV) $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$

① ⓐ f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivation et $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}>0$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

ⓑ $f(x)=x \iff x=6-\dfrac{5}{x+1} \iff x^2+x=6x+1$ $(\times(x+1) \text{ avec } x\neq -1)$.

$\iff x^2-5x-1=0$

$\Delta=29$ $\quad x_1=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$; $x_2=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}<0$.

il existe donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ à $f(x)=x$: $\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

ⓒ si $x\in[0,\alpha]$ alors $0\leqslant x\leqslant\alpha$

$\Rightarrow f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha)$ car f croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\Rightarrow 1\leqslant f(x)\leqslant\alpha$

$\Rightarrow 0\leqslant f(x)\leqslant\alpha \Rightarrow f(x)\in[0,\alpha]$.

si $x\geqslant\alpha \Rightarrow f(x)\geqslant f(\alpha)$ car f croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow f(x)\geqslant\alpha \Rightarrow f(x)\in[\alpha,+\infty[$.

② ⓐ on peut conjecturer (u_n) croissante et convergente vers le point fixe d'abscisse α.

ⓑ Soit P_n la propriété $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$. Montrons par récurrence que $\forall n$, P_n est vraie

Etape 1 : $u_0=1$; $u_1=6-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$ et $\alpha>5$ d'où $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\alpha$ donc P_0 vraie.

Etape 2 : Soit $q\in\mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\iff 0\leqslant u_q\leqslant u_{q+1}\leqslant\alpha$

$\Rightarrow f(0)\leqslant f(u_q)\leqslant f(u_{q+1})\leqslant f(\alpha)$ car $f\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow 0\leqslant 1\leqslant u_{q+1}\leqslant u_{q+2}\leqslant\alpha \Rightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

ⓒ On déduit donc que (U_n) est croissante et majorée par α

d'où par th (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0,\alpha]$.

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(U_n). \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [0,\alpha] \\ f \text{ continue sur } [0,\alpha] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d'après le th du point fixe } f(\ell) = \ell$$

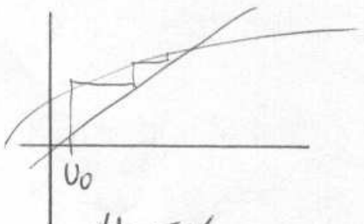
donc d'après 1.b , $\ell = \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

③ A l'aide de la récurrence du 2b on constate que si

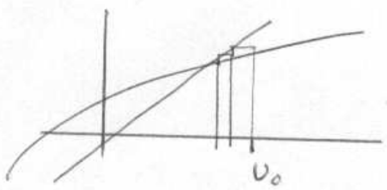
$u_0 < \alpha$ alors $(u_n) \uparrow$ (donc converge vers α).

$u_0 > \alpha$ alors $(U_n) \downarrow$ et $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \alpha$ donc convergence vers α.

si $u_0 = \alpha$ alors $\forall n$ $u_n = \alpha$ et (U_n) stationnaire.



$u_0 < \alpha$



$u_0 < \alpha$.