Bac Blanc II

I ① ⓐ $A(-2,0,1)$; $B(1,2,-1)$; $C(-2,2,2)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

d'où $\vec{AB}.\vec{AC} = 2$

$AB = \|\vec{AB}\| = (9+4+4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{17}$ u.l ; $AC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ u.l

ⓑ Par th. $\vec{AB}.\vec{AC} = B.AC \cos(\vec{AB};\vec{AC})$

d'où $\cos(\vec{AB};\vec{AC}) = \dfrac{\vec{AB}.\vec{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{2}{\sqrt{17}\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{85}}$

d'où $\widehat{BAC} \simeq 77°$.

ⓒ En particulier BAC non alignés (sinon $\widehat{BAC} = 180°$ ou $\widehat{BAC} = 0°$).

② Soit $\mathcal{P}: 2x-y+2z+2$, vérifions que $A,B,C \in \mathcal{P}$

$2(-2)+2+2 = 0 \Rightarrow A\in\mathcal{P}$
$2-2-2+2=0 \Rightarrow B\in\mathcal{P}$
$2(-2)-2+4+2=0 \Rightarrow C\in\mathcal{P}$

Donc $\mathcal{P} = (ABC)$ et donc $(ABC): 2x-y+2z+2=0$.

③ $\mathcal{P}_1: x+y-3z+3=0$; $\mathcal{P}_2: x-2y+6z=0$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\+6\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement.

Ces vecteurs étant clairement non colinéaires, on déduit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants

Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+y = 3t-3 \\ x-2y = -6t \\ z = t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x+y = 3t-3 \\ 3y = 9t-3 \\ z = t\end{cases} \iff \begin{cases} y = 3t-1 \\ x = 3t-3-(3t-1) \\ z = t\end{cases}$

D'où $\begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases}$

d'où P_1 et P_2 sécants selon la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal de (ABC)

$\vec{u}.\vec{n} = -3+2=-1 \neq 0 \implies \vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux $\implies$ (ABC) et $\mathcal{D}$ sécants

$M(x,y,z) \in (ABC) \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} 2x-y+2z+2=0 \\ x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -4-(3t-1)+2t+2=0 \\ x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases} \iff \begin{cases} +t=-1 \\ x=-2 \\ y=-4 \\ z=-1 \end{cases}$

d'où $M(-2;-4;-1)$

Le point d'intersect° de (ABC) et $\mathcal{D}$ est $M(-2,-4,-1)$.

5) a) S sphère de centre $\Omega(1,-3;1)$ et rayon $+3$

donc par th $S : (x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

b) $M(x,y,z) \in S \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9 \\ x=-2 \\ y=3t+1 \\ z=t \end{cases}$

et en injectant les valeurs de $x;y;z$ dans la première équation on obtient $(-3)^2+(3t+4)^2+(t-1)^2=9$

$\iff 9+(3t+4)^2+(t-1)^2=9 \iff (3t+4)^2+(t-1)^2=0$

$\iff \begin{cases} 3t+4=0 \\ t-1=0 \end{cases}$ (car somme de carrés)

$\iff t=1$ et $t=-\frac{4}{3}$ impossible !

Le système n'a pas de solution donc $S \cap \mathcal{D} = \emptyset$

c) $\text{dist}(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2\times1+3+2+2|}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

donc $\text{dist}(\Omega,(ABC)) = r$ où r est le rayon de S

$\implies$ (ABC) et S sont tangents

II 1 a) $\forall x \in]1;e[\qquad \ln x < 1$

$\Rightarrow (\ln x)^{n+1} < (\ln x)^n \quad (\times (\ln x)^n$ avec $(\ln x)^n > 0$ car $x >$

d'où $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$

b) On a $\forall x \in [1;e]$; $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

les fonctions étant continues et les bornes étant dans l'ordre on a par intégration de l'inégalité $\int_1^e (\ln x)^{n+1} dx \leq \int_1^e (\ln x)^n dx$.

d'où $I_{n+1} \leq I_n$ et donc (I_n) décroissante.

2a) $I_1 = \int_1^e \ln x \, dx$

Soient u, v, u', v' continues sur $[1,e]$ avec $u(x) = \ln x$; $v(x) = x$;
$u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = 1$

d'où par intégration par parties $I_1 = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx$

$= e - (e-1) = +1 \Rightarrow I_1 = 1$

b) $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soient u, v, u', v' continues telles que $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ $u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x}$
et $v(x) = x$; $v'(x) = 1$

donc par intégration par parties on a

$$I_{n+1} = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x} \times x \, dx$$

$$= e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n dx = e - (n+1) I_n$$

d'où $I_{n+1} = e - (n+1) I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c) On déduit $I_2 = e - 2I_1$
$= e - 2$

et $I_3 = e - 3I_2$
$= e - 3(e-2) = -2e + 6$

③ ⓐ $\forall x \geq 1$; $\ln x \geq 0 \implies (\ln x)^n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

d'où par théorème de positivité $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx \geq 0$

ⓑ D'après ②b $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

et $I_{n+1} \geq 0$ d'où $e - (n+1) I_n \geq 0$

et donc $(n+1) I_n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ⓒ On a alors d'après ⓐ et ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc d'après le th des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

ⓓ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n I_n + (I_n + I_{n+1}) = (n+1) I_n + I_{n+1}$

$= e$ d'après ②b

d'où $n I_n = e - I_n - I_{n+1}$

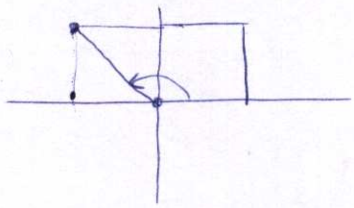
et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n = e$

III ① $z^2 + 4z + 8 = 0$.

$\Delta = 16 - 4 \times 8 = -16 < 0$ donc $z^2 + 4z + 8 = 0$ admet deux racines:

$z_1 = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i = 2(-1 + i) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$



$z_2 = -2 - 2i$

$= -2(1 + i)$

$= -2\sqrt{2} e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2} e^{5i\pi/4}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

Donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

② $A(2-2i)$; $B(-2+2i)$

ⓐ L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ est

$z' = e^{i\pi/2} z$ c'est à dire $z' = iz$

d'où l'image du point $B(-2+2i)$ par cette rotation est

$c = z'_B = i(-2+2i) = -2-2i \implies C(-2-2i)$

ⓑ La rotation de centre A est d'angle $+\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe

$z' - z_A = i(z - z_A)$ d'où $z' = iz + z_A(1-i)$

$\implies z' = iz + (2-2i)(1-i)$

$\implies z' = iz - 4i$

donc l'image du point C par cette rotation est donnée par

$d = z'_C = i(-2-2i) - 4i$

$= 2-6i \implies D(2-6i)$

ⓒ $\left.\begin{array}{l} z_{\overrightarrow{BC}} = -2i-2+2-2i = -4i \\ z_{\overrightarrow{AD}} = 2-6i-2+2i = -4i \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \implies$ ABCD parallélogramme

(3a) $\alpha \neq 0 \implies G_\alpha$ barycentre de $\{(A;1),(B,-1);(C,\alpha)\}$ existe

et d'après la propriété de réduction vectorielle

$\forall M, \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MG_\alpha}$

d'où avec $M = C$ on a $\alpha\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

$\iff \alpha\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}$.

ⓑ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{\alpha}$ varie dans $\mathbb{R}^*$

donc l'ensemble des points G_α lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ est la droite passant par C parallèle à (BA) privée du point C

c'est la droite (CD) privée de C

ⓒ $G_\alpha = D \iff \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\iff \frac{1}{\alpha} = 1$ car $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\iff \alpha = 1$ d'où $G_1 = D$.

④ d'après la propriété de réduction vectorielle $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_2}$

d'où $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2} \iff \|2\overrightarrow{MG_2}\| = 4\sqrt{2}$

$\iff 2MG_2 = 4\sqrt{2}$

$\iff MG_2 = 2\sqrt{2}$

L'ensemble des points M tel que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$

est donc le cercle de centre G_2 et de rayon $2\sqrt{2}$

III Spécialité

①ⓐ $A(-1+i)$; $B(3+2i)$; $C(i\sqrt{2})$

$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$

on a $z_A' = \frac{(1+i)(-1-i)}{\sqrt{2}} - 1 + i(1+\sqrt{2})$

$= -\frac{2i}{\sqrt{2}} - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -\sqrt{2}i - 1 + i + i\sqrt{2} = -1+i$

$\Rightarrow z_A' = z_A$

$z_C' = \frac{(1+i)(-i\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - 1 + i(1+\sqrt{2})$

$= -i + 1 - 1 + i + i\sqrt{2} = i\sqrt{2} \Rightarrow z_C' = z_C$

ⓑ f est une similitude indirecte (donc $f \neq id$) et f admet A et C (2 points distincts) comme point fixe donc par th

f est une réflexion (AC).

②ⓐ h homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ a pour écriture complexe

$z' - z_A = \sqrt{2}(z - z_A)$ d'où $z' = \sqrt{2}z + z_A(1-\sqrt{2})$

$\iff z' = \sqrt{2}z + (-1+i)(1-\sqrt{2})$

(b) f a pour écriture complexe $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$

h a pour écriture cplexe $z' = \sqrt{2}z + (1-i)(\sqrt{2}-1)$

donc $g = f\circ h$ d'où g a pour écriture cplexe

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sqrt{2}z + (1-i)(\sqrt{2}-1)}\right) - 1 + i(1+\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\bar{z} + (1+i)(\sqrt{2}-1)\right) - 1 + i(1+\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow z' = (1+i)\bar{z} + \frac{2i}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1) - 1 + i(1+\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow z' = (1+i)\bar{z} + 2i - i\sqrt{2} - 1 + i + i\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow z' = (1+i)\bar{z} + 3i - 1$ d'où l'écriture de g est $z' = (1+i)\bar{z} + 3i - 1$

(3)(a) $M_0(2-4i)$ d'où M_0'' a pour affixe

$$z' = (1+i)(\overline{2-4i}) + 3i - 1$$

$= (1+i)(2+4i) + 3i - 1 = -2 + 6i + 3i - 1 = -3 + 9i \rightarrow M_0''(-3+9i)$

on a alors $A(-1;1)$, $B(3;2)$; $M_0''(-3;9)$ donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $\vec{AM_0''}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}.\vec{AM_0''} = -8 + 8 = 0 \implies \vec{AB} \perp \vec{AM_0''}$

(b) Soit $M(x+iy)$ donc l'affixe de $M'' = g(M)$ est donnée par

$$z'' = (1+i)(x - iy) + 3i - 1$$

$= x + y - 1 + i(x - y + 3)$ d'où $M''(x+y-1 ; x-y+3)$

donc $\vec{AM''}\begin{pmatrix}x+y\\x-y+2\end{pmatrix}$

donc $\vec{AM''} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow (x+y)\times 4 + (x-y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 5x + 3y = -2$ (E)

(c) $(-1, 1)$ est une solut° particulière de l'équation.

On a $5(-1) + 3\times(1) = -2$

Donc par différence avec (E) on a $5(x+1) + 3(y-1) = 0$

d'où $5(x+1) = 3(1-y)$. (*)

On a alors $\left.\begin{array}{l} 5 \mid 3(1-y) \\ 5 \wedge 3 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ d'après le th de Gauss 5 divise $(1-y)$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(1-y) = 5k$

et en injectant dans (*) on déduit $5(x+1) = 3 \times 5k$

donc $x+1 = 3k$.

Finalement $y = 1-5k$ et $x = 3k-1$

Vérifions que ce couple est bien solution.

$$\begin{aligned} 5x+3y &= 5(3k-1)+3(1-5k) \\ &= 15k-5+3-15k \\ &= -2 \end{aligned}$$

On a bien $S = \{(3k-1, 1-5k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

d) $M(x+iy)$ avec $x,y \in \mathbb{Z}$, $x,y \in [-6,6]$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM}$"

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x+3y = -2 \\ (x,y) \in [-6,6]^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \; ; \; y = 1-5k \\ x,y \in [-6,6]^2 \end{cases}$$

Cherchons les valeurs de k correspondantes : $-6 \leq 3k-1 \leq 6$

$\Longleftrightarrow -5 \leq 3k \leq 7$

$\Longleftrightarrow k \in \{-1 ; 0, 1, 2\}$.

et $-6 \leq 1-5k \leq 6 \Longleftrightarrow -7 \leq -5k \leq 5$

$\Longleftrightarrow -5 \leq 5k \leq +7 \Longleftrightarrow k \in \{-1 ; 0 ; 1\}$

Donc le système équivaut à $\begin{cases} x = 3k-1 \; ; \; y = 1-5k \\ k \in \{-1, 0, 1\} \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) \in \{(-4;6) ; (-1;1) ; ($

Les points solutions du problème sont les points d'affixe $-4+6i$; $-1+i$; $2-4i$