TS

Devoir N°1

21 sept 2010

Ⓘ ① $X = \dfrac{\pi x+1}{x+2}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{2} \text{ (par Th)} \\ \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}} \cos X = 0 \end{array}\right\}$ par composée $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{+\infty} f_1 = 0.$

② $f_2(x) = \dfrac{\sin 7x}{2x} = \dfrac{\sin(7x)}{7x} \times \dfrac{7}{2}.$

$\left.\begin{array}{l} X = 7x \\ \lim\limits_{x\to0} 7x = 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\}$ Composée $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 7x}{7x} = 1$

donc par produit $\lim\limits_{0} f_2 = \dfrac{7}{2}$

③ $f_3(x) = \dfrac{\sin 7x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin 7x}{7x} \times \dfrac{7x}{2x} \times \dfrac{2x}{\sin 2x}.$

$\left.\begin{array}{l} X = 2x \\ \lim\limits_{x\to0} 2x = 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\}$ Composée $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{\sin 2x}$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 7x}{7x} = 1$ donc par produit $\lim\limits_{0} f_3 = \dfrac{7}{2}$

④ $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x-9}$;

$f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} (\sqrt{x}+3) = \dfrac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

d'où $\lim\limits_{9} f_4 = \dfrac{1}{6}.$

⑤ $\forall x \neq 0, \quad \left|\sin \dfrac{1}{x^3}\right| \leq 1$

donc par produit $\left|x^3 \sin \dfrac{1}{x^3}\right| \leq |x^3|$ $(\times |x^3|$ avec $|x^3| > 0$

finalement, $|f_5(x)| \leq |x|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

et $\lim\limits_{x \to 0} |x|^3 = 0$ donc par le th des gendarmes : $\lim\limits_{0} f_5 = 0$.

(II) $g(x) = \dfrac{2x-6}{-x^2+7x-12}$;

par th $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$.

Soit $P(x) = -x^2+7x-12$

$\Delta = 49-48 = 1$ d'où P admet deux racines ; $x_1 = \dfrac{-7+1}{-2} = +3$

$x_2 = \dfrac{-7-1}{-2} = +4$

on déduit le signe de P :

x		3		4	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

on déduit $\lim\limits_{4^+} P = 0^-$

et d'autre part $\lim\limits_{x \to 4} 2x-6 = 2$

donc par quotient, $\lim\limits_{4^+} g = -\infty$.

(III) $\dfrac{x}{x-1} \leq \dfrac{2}{x} \iff \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x} \leq 0$

$\iff \dfrac{x^2-2(x-1)}{x(x-1)} \leq 0 \iff \dfrac{x^2-2x+2}{x(x-1)} \leq 0$.

Soit $P(x) = x^2-2x+2$

$\Delta = 4-8 = -4 < 0 \implies$ P garde un signe constant strictement positif (signe de a).

ainsi l'inéquation équivaut à $\dfrac{1}{x(x-1)} \leq 0$.

x		0		1	
$\frac{1}{x(x-1)}$	$+$	‖	$-$	‖	$+$

d'où $S =]0,1[$

IV Soit $P(x) = x^3 - x - 6$

$P(2) = 0 \implies 2$ racine de P donc P se factorise par $x-2$

ainsi $P(x) = (x-2)(x^2 + bx + 3)$ où $b \in \mathbb{R}$.

et $(x-2)(x^2+bx+3) = x^3 + x^2(b-2) + x(3-2b) - 6$

et donc par identification on a $b-2=0$ et $3-2b=-1$ donc $b=2$

et ainsi $P(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$

Rq : on peut aussi faire la division :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & -x & -6 & x-2 \\ x^3 & -2x^2 & & & x^2+2x+3 \\ \hline & +2x^2 & -x & -6 & \\ & +2x^2 & -4x & & \\ \hline & & +3x & -6 & \\ & & 3x & -6 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

ainsi $x^3 - x - 6 = (x^2+2x+3)(x-2)$.

on déduit alors que pour $x \neq 2$; $f(x) = \frac{P(x)}{x-2} = x^2+2x+3$.

et donc $\lim_{2} f = 11$

d'autre part , donc f n'est pas continue en 2.

V soit (E) : $(1+m)x^2 - mx + m - 1 = 0$.

$\Delta = m^2 - 4(1+m)(m-1)$
$= m^2 - 4(m^2-1) = -3m^2 + 4$

$\Delta > 0 \iff -3m^2+4 > 0 \iff m^2 < \frac{4}{3} \iff m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}} ; +\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$

$\Delta = 0 \iff -3m^2+4 = 0 \iff m \in \left\{-\frac{2}{\sqrt{3}} ; +\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

$\Delta < 0 \iff m \notin \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} ; +\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

Conclusion :
(E) admet deux solutions pour $m \in \left]-\frac{2\sqrt{3}}{3} ; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right[$
(E) admet une unique solut° (double) si $m \in \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3} ; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$
(E) n'admet pas de solution pour $m \notin \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3} ; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$