TS le 14 oct 2010

Devoir n° 2

I

$x \longmapsto 1-x$ est dérivable sur $I =]-\infty, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

$X \longmapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

donc par composée $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$

On a alors $f'(x) = \dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}$ $\forall x \in I$

d'où $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$.

II $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$

f et f' dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composée g dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = ((f(x))^2)' + ((f'(x))^2)'$

$= 2f'(x)f(x) + 2f''(x)f'(x)$ en vertu de la formule $(u^2)' = 2u'u$

$= 2f'(x)(f(x) + f''(x))$

$= 0$ par hypothèse.

d'où g est une fonction constante.

III Soit P_n la propriété $6 | A_n$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $6 | A_n$.

Etape 1 : pour $n = 0$, $A_0 = 0$ donc $6 | A_0$ et P_0 vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie donc $6 | A_q$ c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$q(q^2+5) = 6k$

$A_{q+1} = (q+1)((q+1)^2+5)$

$= q((q+1)^2+5) + (q+1)^2+5$

$= q(q^2+5+2q+1) + (q+1)^2+5$

$= q(q^2+5) + 2q^2+q + q^2+2q+6$

Finalement $A_{q+1} = 6k + 3q^2+3q+6$
$= 6k + 3q(q+1)+6$

or $q(q+1)$ produit de deux entiers consécutifs donc $q(q+1) = 2k'$
$k' \in \mathbb{Z}$

d'où $A_{q+1} = 6k + 6k' + 6$
$= 6(k+k'+6) \Longrightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 6 \mid A_n$.

IV ① f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de continuité

d'où f_1 admet des primitives,

on a $f_1(x) = (2x-1)\sqrt{x^2-x+1}$
$= \underbrace{(2x-1)}_{u'}\underbrace{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}}_{u^{1/2}}$

d'où $F_1(x) = \dfrac{(x^2-x+1)^{3/2}}{3/2} + K$ donc $F_1(x) = \dfrac{2}{3}(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1} + K$
avec $K \in \mathbb{R}$.

② f_2 est continue sur I, donc f_2 admet des primitives.

$f_2(x) = \underbrace{(3x^2-5)}_{u'}\underbrace{(x^3-5x)^{-3}}_{u^{-3}}$ d'où $F_2(x) = \dfrac{(x^3-5x)^{-2}}{-2} + K$, $K \in \mathbb{R}$

donc $F_2(x) = -\dfrac{1}{2(x^3-5x)^2} + K$, $K \in \mathbb{R}$.

③ $f_3(x) = \cos(2x-1)$
$= \dfrac{1}{2} \times \underbrace{2\cos(2x-1)}_{u'\cos u}$

f_3 est continue donc f_3 admet des primitives et $F_3(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x-1) + K$
avec $K \in \mathbb{R}$.

④ $f_4(x) = \tan x + \tan^3 x$; $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

f_4 continue sur $I \Rightarrow f_4$ admet des primitives.

$f_4(x) = \underbrace{\tan x\,(1+\tan^2 x)}_{u u'}$ d'où $F_4(x) = \dfrac{(\tan x)^2}{2} + K$, $K \in \mathbb{R}$.

V ① $f(x) = \cos^3 x$
$= \cos x\,(\cos^2 x)$
$= \cos x\,(1-\sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x.$ $\forall x \in \mathbb{R}.$

② f étant continue, f admet des primitives et on a

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + K \quad , K \in \mathbb{R}.$

De plus $F(\frac{\pi}{2}) = 0 \iff 1 - \frac{1}{3} + K = 0$ d'où $K = -\frac{2}{3}$

finalement $F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{2}{3}.$

VI ①ⓐ $G(x) = F(x) + F(-x)$

$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto -x \text{ est dérivable sur } I \text{ et à valeurs dans } I \\ X \longmapsto F(X) \text{ est dérivable sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow$ (par composée)

$x \longmapsto F(-x)$ est dérivable sur I et donc par somme G dérivable sur I

On a alors $G'(x) = F'(x) + (F(-x))' \quad \forall x \in I$
$= F'(x) - F'(-x)$
$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$

ⓑ On déduit de ce qui précède que G est constante sur I

d'où $G(x) = G(0) \ \forall x \in \mathbb{R}$
$= F(0) + F(0)$
$= 0$

donc $\forall x \ G(x) = 0$

$\iff F(x) + F(-x) = 0$

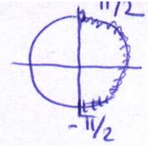
$\iff F(x) = -F(-x)$

d'où comme de plus $]-1;1[$ est symétrique par rapport à 0, on déduit que F est impaire

②ⓐ T dérivable d'après les règles de dérivation et

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad T'(x) = (F(\sin x))' - 1$
$= \cos x \ F'(\sin x) - 1$
$= \cos x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 1$

donc $T'(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} - 1$



$= \dfrac{\cos x}{|\cos x|} - 1$ mais pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\cos x > 0$

$= 0.$

On déduit donc que T est constante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

donc $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $T(x) = T(0)$

$= F(\sin(0)) - 0 = F(0) - 0$

d'où T est la fonction nulle $= 0.$

donc $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \pi/2[$, $F(\sin x) - x = 0$ c'est-à-dire $F(\sin x) = x$.

(b) Si on applique cette égalité avec $x = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin x = \frac{1}{2}$

et donc on obtient $F(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

VII (1) f est un polynôme de degré 3 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x-2)$

et on obtient le signe de f' d'après la règle du trinôme.

On déduit alors le tableau de variation de f

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-5	↘	-9	↗ $+\infty$

par th, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

et $f(2) = 2^3 - 12 - 5$

$= -9$

(2) Sur $]-\infty; 2]$ f admet -5 comme maximum atteint en 0. On en déduit que sur $]-\infty; 2]$, $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $[2; +\infty[$, $\left.\begin{array}{l} f \text{ est croissante strictement} \\ f \text{ est continue (polynôme)} \\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \; ; \; f(2) = -9 \\ 0 \in [-9; +\infty[\end{array}\right\}$ donc d'après le th. de la bijection,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2, +\infty[$.

On déduit donc que sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet une unique solution.

A l'aide de la calculatrice on obtient : $\left.\begin{array}{l} f(3,426) \simeq 1,6.10^{-4} > 0 \\ f(3,425) \simeq -0,014 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3,425 < \alpha < 3,4$

Donc $\alpha \simeq 3,425$ est une valeur approchée par défaut.

3) α solution de (E) donc $\alpha^3 - 3\alpha^2 = 5$.

$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha - 3) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}.$$

VIII 1) a) $f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$ sur $I = [-3;+\infty[$

Soit t le taux d'accroissement en -3 : $t(x) = \dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3}$

$$= \frac{\sqrt{x^2(x+3)}}{x+3}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+3}}$$

or $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} x+3 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \sqrt{X} = 0^+ \end{array}\right\}$ donc par composée $\lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{x+3} = 0^+$

et $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x^2} = 3$ d'où par quotient $\lim\limits_{-3^+} t = +\infty$

f n'est donc pas dérivable en -3 mais C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $x = -3$.

b) dérivabilité en 0 : soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x^2(x+3)}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{x+3}}{x}$

⚠ $\sqrt{x^2} = |$

d'où pour $x > 0$ $t(x) = \sqrt{x+3}$ et donc $\lim\limits_{0^+} t = +\sqrt{3}$.

et pour $x < 0$ $t(x) = -\sqrt{x+3}$ et donc $\lim\limits_{0^-} t = -\sqrt{3}$

On déduit que f n'est pas dérivable en 0 mais admet deux demi-tangentes en $x = 0$.

A droite l'éq de la demi-tangente : $\Delta_d : y = \sqrt{3}\,x$

A gauche l'éq de la demi-tangente : $\Delta_g : y = -\sqrt{3}\,x$

2) $X = x^2(x-3)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2(x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\}$ donc par composée, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

③ f dérivable sur $I\setminus\{-3;0\}$ et $\forall x \in I\setminus\{-3,0\}$

on a $f'(x) = \dfrac{(x^2(x+3))'}{2\sqrt{x^2(x+3)}}$

$= \dfrac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^2(x-3)}} = \dfrac{3x(x+2)}{2\sqrt{x^2(x-3)}}$

$2\sqrt{x^2(x-3)} > 0 \quad \forall x \in I\setminus\{-3,0\}$ donc le signe de f' est celui $x(x+2)$ et d'après la règle du signe du trinôme, on déduit le tableau de variation de f.

$f(-2) = \sqrt{4 \times 1} = 2$

x	-3		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

④ Lors de la représentation graphique il faut bien faire attention aux demi-tangentes