1 11 nov 2010

DS 3 - Mathematiques

I

① $\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(x+9)$.

Domaine de resolution : $x > -4$; $x > -1$ et $x > -9$ d'où $D =]-1 ; +\infty[$.

$(E_1) \iff \ln(x+4)(x+1) = \ln(x+9)$

$\iff (x+4)(x+1) = x+9$ (car $\ln$ st. $\uparrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff x^2+4x-5=0$

$\Delta = 16+20 = 36 > 0$ donc 2 racines : $x_1 = \frac{-4+6}{2} = 1 \in D$; $x_2 = \frac{-4-6}{2} = -5 \notin D$

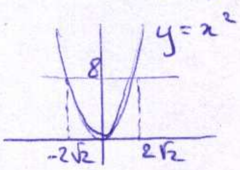
donc $S = \{1\}$

② $\ln(x^2-8) \leq \ln x + \ln 2$

Domaine de resolut° : $x^2 - 8 > 0$ et $x > 0$

$\iff x \in]-\infty ; -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$ et $x>0$

donc $D =]2\sqrt{2} ; +\infty[$



$(E_2) \iff \ln(x^2-8) \leq \ln(2x)$

$\iff x^2-8 \leq 2x$ car $\ln$ st. $\uparrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff x^2-2x-8 \leq 0$.

$\Delta = 36$ donc deux racines : $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$; $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

d'où le tableau de signes :

x		-2		4	
x^2-2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

et $S = [-2 ; 4] \cap D$

donc $S =]2\sqrt{2} ; 4]$

③ $\ln(x+1) > 0 \iff x+1 > 1$ par th.

$\iff x > 0$.

Donc nous avons le tableau de signes suivant pour (E_3)

x	-1		0		$3/2$	
$\ln(x+1)$	‖	$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	‖	$-$			0	$+$
$(2x-3)\ln(x+1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

et $D =]-1 ; +\infty[$

Donc $S =]-1 ; 0[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$.

④ $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$.

$D = \mathbb{R}_+^*$ et $(E_4) \iff \begin{cases} 2X^2 + X - 6 = 0 \quad (*) \\ X = \ln x \end{cases}$

Résolution de $(*)$: $\Delta = 49$ donc on a deux racines pour $(*)$: $X_1 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$

ou $X_2 = \frac{-1-7}{4} = -4$

d'où $(E_4) \iff \ln x = \frac{3}{2}$ ou $\ln x = -4$

$\iff \ln x = \ln(e\sqrt{e})$ ou $\ln x = \ln \frac{1}{e^4}$

$\iff x = e\sqrt{e}$ ou $x = \frac{1}{e^4}$ car $\ln$ st. $\uparrow$ sur

d'où $S = \{e\sqrt{e} ; \frac{1}{e^4}\}$

II $f_1(x) = (\ln x)^4$.

$\left.\begin{array}{l} X = \ln x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X^4 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{+\infty} f_1 = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} X = \ln x \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^4 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{-\infty} f_1 = +\infty.$

$f_2(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par inverse, $\lim\limits_{+\infty} f_2 = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1+} \ln x = 0_+$ par th.

donc par inverse $\lim\limits_{1+} f_2 = +\infty$.

$f_3(x) = \ln(\ln(x))$.

$\left.\begin{array}{l} X = \ln x. \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{+\infty} f_3 = +\infty.$

$\left.\begin{array}{l} X = \ln x. \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{1^+} f_4 = -\infty$

$f_4(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$;

- $f_4(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3$.

et $X = 3x$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ (par th.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\ldots}{3\ldots}$

et donc par produit, $\lim\limits_{0} f_4 = 3$

$f_4(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{1+3x} \times \dfrac{1+3x}{x}$

$\left.\begin{array}{l} X = 1+3x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+3x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{1+3x} = 0$

d'autre part par th. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+3x}{x} = 3$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4 = 0$.

III $f_1(x) = \dfrac{7}{2x-3} + \dfrac{1}{(2x-3)^3}$; f_1 continue sur $I =]-\infty ; \frac{3}{2}[$

donc f_1 admet des primitives

$f_1(x) = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{2x-3} + \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{(2x-3)^3}$

d'où $F_1(x) = \dfrac{7}{2} \ln|2x-3| + \dfrac{1}{2} \dfrac{(2x-3)^{-2}}{-2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

et sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$; $2x-3 < 0$ donc $F_1(x) = \dfrac{7}{2} \ln(3-2x) - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{(2x-3)^2} + K$.

IV ① ⓐ

$f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$ pour $x>0$

$= \frac{3x^2}{2} - x^2\ln x + 1$

et $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2} = 0$; $\lim_{x\to 0} x^2\ln x = 0$ (par th.)

d'où par somme, $\lim_{x\to 0} f(x) = +1$

et de plus $f(0) = 1$ donc la fonction f est continue en 0.

ⓑ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} 3-2\ln x = -\infty$ (par somme et produit).

et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

② ⓐ dérivabilité de f en 0.

Soit $t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pour $x>0$.

$= \frac{1}{2}x(3-2\ln x)$

$= \frac{1}{2}3x - x\ln x$.

et par th. $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc par somme $\lim_{0} t = 0$

d'où f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

ⓑ pour $x>0$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$

donc f est dérivable d'après les règles de dérivabilité

et $f'(x) = \frac{1}{2}2x(3-2\ln x) + \frac{1}{2}x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right)$

$= x(3-2\ln x) - x = 2x - 2x\ln x = 2x(1-\ln x)$

③ Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.

$1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1$

$\iff x < e$ (par th.)

d'autre part, $2x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln x$

d'où le tableau de variations de f

4)

x	0		e	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2+1$	$\searrow$ $-\infty$

et $f(e) = \frac{1}{2}e^2(3-2)+1$

$= \frac{1}{2}e^2+1$

④ D a pour équation : $D : y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$\iff y = 2(x-1)+\frac{5}{2}$

d'où $D : y = 2x+\frac{1}{2}$.

Ⓥ Ⓐ ① $u(x) = x^2-2+\ln x$; $x>0$.

u dérivable d'après les règles de dérivation et $\forall x>0$; $u'(x) = 2x+\frac{1}{x}$.

donc sur $\mathbb{R}_+^*$; $u'(x)>0$ donc u st. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2+\ln x = +\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{0} u = -\infty$.

② ⓐ $\left.\begin{array}{l}u \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ (car dérivable)} \\ u \text{ st } \nearrow \text{ d'après (A1)} \\ \lim\limits_{0} u = -\infty \; ; \; \lim\limits_{+\infty} u = +\infty . \\ (0 \in]-\infty, +\infty[.)\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ donc d'après le th de la bijection, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ unique solution de $u(x)=0$.

ⓑ A l'aide de la calculatrice, on obtient par balayage. $\alpha \in]1,31 ; 1,32[$

③ u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\left.\begin{array}{l}\text{si } x>\alpha \text{ alors } u(x)>u(\alpha) \text{ donc } u(x)>0 \\ \text{si } x<\alpha \text{ alors } u(x)<u(\alpha) \text{ donc } u(x)<0 .\end{array}\right\}$ donc

x	0		α	
$u(x)$		$-$	0	$+$

④ $u(\alpha)=0 \iff \alpha^2-2+\ln\alpha = 0$

$\iff \ln\alpha = 2-\alpha^2$

Ⓑ ① $f(x) = x^2+(2-\ln x)^2$; $x>0$.

f dérivable d'après les règles de dérivation et $\forall x>0$; $f'(x) = 2x+2(2-\ln x)\times\left(-\frac{1}{x}\right)$

donc $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot(2x^2-4-2\ln x)$ d'où $f'(x) = \frac{2u(x)}{x}$.

② $x>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$

d'où le tableau de variations de f

x		α	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(\alpha)$	↗

avec $f(\alpha) = \alpha^2 + (2-\ln\alpha)^2$

$= \alpha^2 + (2+\alpha^2-2)^2$ d'après A4

$= \alpha^2 + \alpha^4$

$= \alpha^2(1+\alpha^2)$.

C ① $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-0 \\ \ln x - 2\end{pmatrix}$ donc $AM^2 = x^2 + (\ln x - 2)^2$

donc on a bien $AM = \sqrt{f(x)}$

② ⓐ $g(x) = \sqrt{f(x)}$

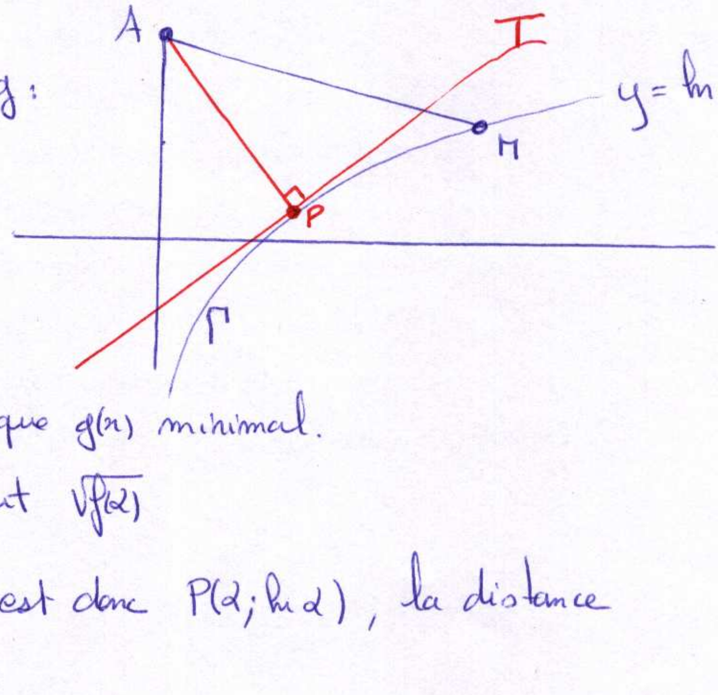
g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et $\forall x>0$; $g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}} f'(x)$.

et $\forall x>0$; $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$.

donc f et g ont les mêmes variations.

On déduit le tableau de variations de g :

x		α	
$g(x)$	↘	$\sqrt{f(\alpha)}$	↗



ⓑ On déduit que AM minimale lorsque $g(x)$ minimal.

g atteint son minimum en α et vaut $\sqrt{f(\alpha)}$

le point P en lequel AM est minimal est donc $P(\alpha ; \ln\alpha)$, la distance AP vaut alors $AP = \sqrt{f(\alpha)}$

ⓒ on a $f(\alpha) = \alpha^2(1+\alpha^2)$ (voir B ②)

donc $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

③ La tangente au point P à Γ a pour équation : $T : y = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha) + \ln\alpha$

donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\alpha \end{pmatrix}$ vecteur directeur de T.

d'autre part $\vec{AP}\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln\alpha - 2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AP)

$\Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{AP} = \alpha + \frac{1}{\alpha}(\ln\alpha - 2)$

$= \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 + \ln\alpha - 2) = \frac{u(\alpha)}{\alpha} = 0$

donc $\vec{u} \perp (AP)$ $\Longrightarrow$ $T \perp (AP)$!