le 20 janv 201

DS 5 - Mathématiques

I ① On a (ii) $\iff$ v solution de (E') et $v(0)=4$

$\iff \frac{1}{u}$ solution de (E') et $\frac{1}{u(0)}=4$

$\iff \left(\frac{1}{u}\right)' = -2\left(\frac{1}{u}\right)+3$ et $u(0)=\frac{1}{4}$

$\iff -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2}{u}+3$ et $u(0)=\frac{1}{4}$

$\iff -u' = -2u+3u^2$ et $u(0)=\frac{1}{4}$

$\iff u' = 2u-3u^2$ et $u(0)=\frac{1}{4}$

$\iff$ (i).

On a donc bien l'équivalence demandée.

② (E') : $y'=-2y+3$.

On a une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $v(x)=Ke^{ax}-\frac{b}{a}$

Donc $v(x)=Ke^{-2x}+\frac{3}{2}$ avec $K\in\mathbb{R}$.

De plus $v(0)=4 \iff K+\frac{3}{2}=4 \iff K=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

d'où $v(x)=\frac{5}{2}e^{-2x}+\frac{3}{2}$

③ D'après ①, u solution de (E) et $u(0)=\frac{1}{4}$

$\iff v$ solution de (E') et $v(0)=4$ avec $v=\frac{1}{u}$

$\iff v(x)=\frac{5}{2}e^{-2x}+\frac{3}{2}$ et $u=\frac{1}{v}$ (on a bien $v(x)\neq 0\ \forall x$

$$\iff u(x)=\frac{1}{\frac{5}{2}e^{-2x}+\frac{3}{2}}.$$

Finalement la fonction u cherchée est $u(x)=\frac{2}{5e^{-2x}+3}$.

II 1) Soit $A(-1+2i)$ alors $M(z) \in \mathcal{E}_1 \iff \arg(z - z_A) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\iff (\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

2) Soit $B(-3+2i)$; $C(3+2i)$

$M(z) \in \mathcal{E}_2 \iff \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \pi (2\pi) \iff (\vec{CM}, \vec{BM}) = \pi\ (2\pi)$

$\iff M \in]CB[$.

3) $D(2i)$; $E(-3i)$.

$M \in \mathcal{E}_3 \iff \arg\left(i\,\frac{z-2i}{z+3i}\right) = 0\ (2\pi)$ ou $z = 2i$

$\iff \arg(i) + \arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_E}\right) = 0 (2\pi)$ ou $M = D$

$\iff (\vec{EM}, \vec{DM}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou $M = D$.

$\mathcal{E}_3$ est un demi-cercle. (voir figure)

4) $M \in \mathcal{E}_4 \iff |z+2+i| = |\bar{z} - 2i|$

$\iff |z+2+i| = |\overline{\bar{z}-2i}| \iff |z+2+i| = |z+2i|$

$F(-2-i)$; $G(-2i)$. alors $\mathcal{E}_4$ médiatrice de $[FG]$

III 1) $a_1 = \frac{2-i}{5-2i} = \frac{(2-i)(5+2i)}{29} = \frac{12-i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{i}{29}$.

$a_2 = (1+3i)(5-i)$

$= 8 + 14i$.

2) (E) $\iff 4z + 3i(\bar{z} + 5i) + 2 - 3i = 0$

$\iff 4z + 3i\bar{z} - 13 - 3i = 0$

$\iff 4(x+iy) + 3i(x-iy) - 13 - 3i = 0$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $z = x+iy$

$\iff 4x + 3y - 13 + i(4y + 3x - 3) = 0$

$\iff \begin{cases} 4x+3y = 13 \\ 4y + 3x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ -7y = 27 \end{cases}$ $3L_1 - 4L_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{27}{7} \\ x = \dfrac{13-3y}{4} = \dfrac{13+\frac{3\times 27}{7}}{4} = \dfrac{172}{7\times 4} = \dfrac{43}{7} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{ \dfrac{43}{7} - \dfrac{27}{7} i \right\}$

IV

① $z = i(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - (\sqrt{6}+\sqrt{2})$

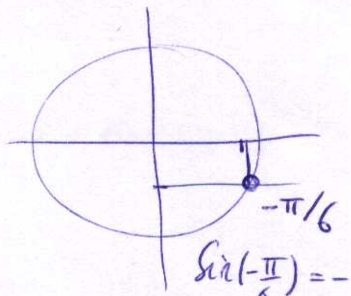
donc $z^2 = (i(\sqrt{6}-\sqrt{2}))^2 - 2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$

$= -(8-2\sqrt{12}) - 2i\times 4 + (8+2\sqrt{12})$

$= 4\sqrt{12} - 8i = 8\sqrt{3} - 8i$

$= 16\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$

On déduit donc que $z^2 = 16e^{-i\pi/6}$



$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $|z|^2 = 16 \Longleftrightarrow |z| = 4.$

$\arg(z^2) = -\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi) \Longleftrightarrow 2\arg(z) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \arg(z) = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

d'autre part l'expression de z montre que $\mathrm{Im}(z) > 0$

donc $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{12}(2\pi)$ est impossible d'où $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{11\pi}{12}$

On a donc $z = 4e^{\frac{11i\pi}{12}}$.

V ② $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$= -2 - \dfrac{10i\sqrt{3}}{3}$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2 - \dfrac{10i\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

③ $\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}i}{-6-6i\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6} \; \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

$= -\dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} = -\dfrac{1}{9\times 4} \times (0-4i\sqrt{3})$

$= \dfrac{i\sqrt{3}}{9}$

Donc par théorème $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\dfrac{i\sqrt{3}}{18}\right) \quad (2\pi)$

$= \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

Donc ABCD a les diagonale perpendiculaire $\Rightarrow$ ABCD losange.

VI ① $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.

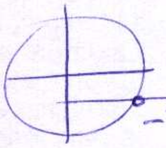
$\Delta = -4$ donc on a 2 solutions complexes : $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$

$z_2 = \sqrt{3} - i$

$S = \{\sqrt{3}+i \,;\, \sqrt{3}-i\}$

② ⓐ $z_A = \sqrt{3} - i$

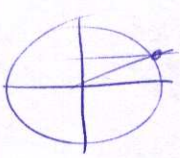
$= 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$



$= 2e^{-i\pi/6}$

et $z_B = \sqrt{3} + i$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$



$z_C = \dfrac{z_O + z_B}{2} = \dfrac{z_B}{2} = e^{i\pi/6}$

ⓒ $OA = |z_A| = 2$

$OB = |z_B| = 2$

$AB = |z_B - z_A| = |2i| = 2$

$\Rightarrow$ OAB équilatéral

3 b l'écriture complexe de la rotat° de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = e^{-i\pi/2}(z - z_0) + z_0 \quad \text{d'où} \quad z' = -iz$$

on déduit que $z_D = (z_C)' = -i z_C$

$$= e^{-i\pi/2} \cdot e^{i\pi/6}$$

$$= e^{-i\pi/3}$$

l'écriture de la translation de vecteur $2\vec{v}$ est

$$z' = z + 2i \qquad (\text{car } z_{\vec{v}} = i)$$

d'où $z_E = z_D + 2i = e^{-i\pi/3} + 2i$.

$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + i(4 - \sqrt{3})\right).$$

c $OE^2 = |z_E|^2 = \frac{1}{4} \times \left(1 + (4-\sqrt{3})^2\right)$

$$= \frac{1}{4}(20 - 8\sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3}. \implies OE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

$$BE^2 = |z_E - z_B|^2 = \left|\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{i(2-\sqrt{3})}{2}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left((1-2\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2\right) = \frac{1}{4}(13 - 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{4}(20 - 8\sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3}$$

$$\implies BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

4 On a $OE = BE$ (d'après 3c)

$OC = BC$ car C milieu de [OB]

$AO = BA$ car ABC équilatéral (2a)

donc E, C, A sont des points de la médiatrice de [OB]

$\implies$ E, C, A alignés.

Exercice 2 : (3 points)

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification) :

$\mathscr{E}_1 = \left\{ M(z) \ / \ \arg(z - 2i + 1) = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \right\}$

$\mathscr{E}_2 = \left\{ M(z) \ / \ \arg\left(\dfrac{z - 2i + 3}{z - 3 - 2i}\right) = \pi \quad (2\pi) \right\}$

$\mathscr{E}_3 = \left\{ M(z) \ / \ Z = i\dfrac{z - 2i}{z + 3i} \in \mathbb{R}_+ \right\}$

$\mathscr{E}_4 = \{ M(z) \ / \ |z + 2 + i| = |\bar{z} - 2i| \}$

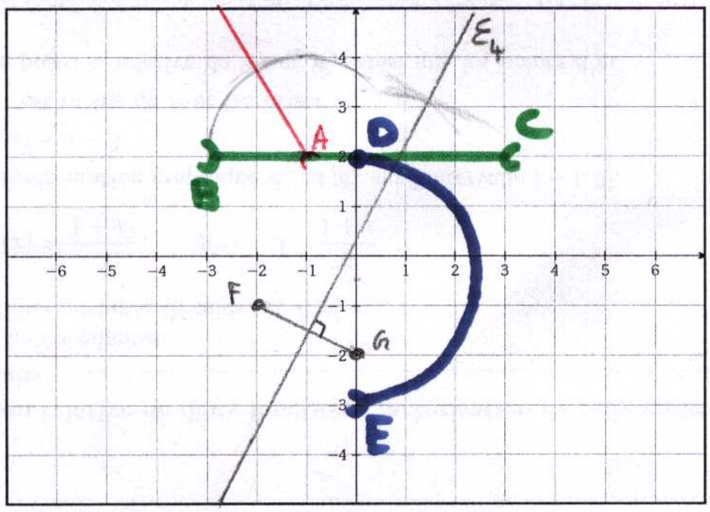


Figure Ex VI.

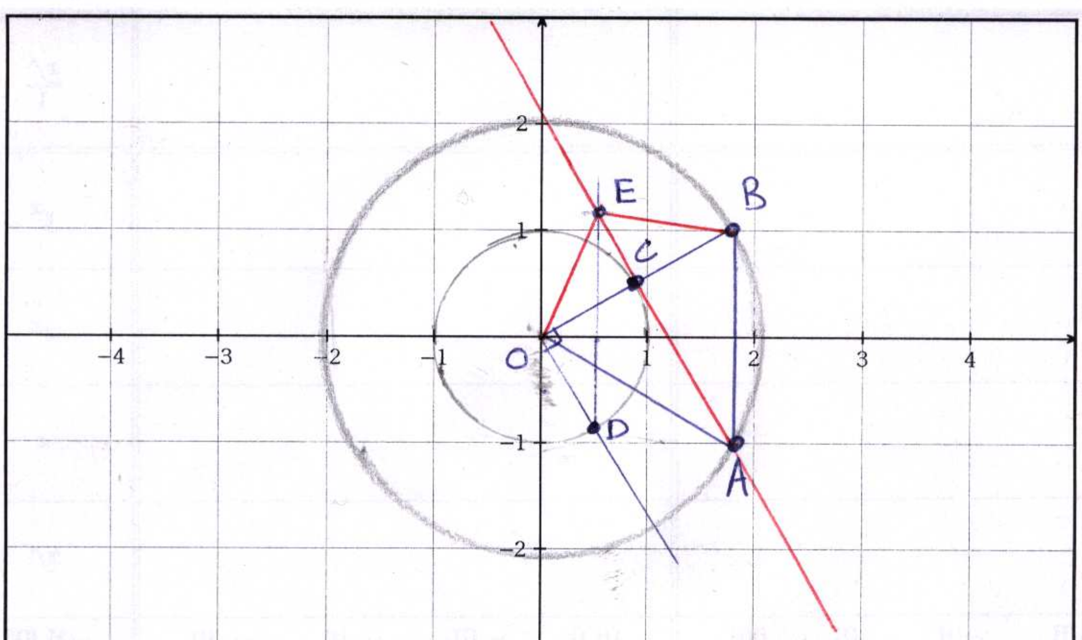


Figure ex V.