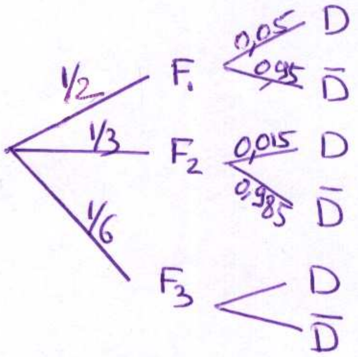
19 mai 20

DS 9 - TS 6.

I ⓐ d'après l'énoncé : $P(F_1) = \frac{1}{2}$; $P(F_2) = \frac{1}{3}$; $P(F_3) = 1 - P(F_1) - P(F_2) = \frac{1}{6}$

$P_{F_1}(D) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; $P_{F_2}(D) = \frac{1,5}{100} = 0,015$; $P(D) = \frac{3,5}{100} = 0,035.$



ⓑ $P(F_1 \cap D) = P(F_1) \times P_{F_1}(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40} = 0,025$

ⓒ $P(F_2 \cap D) = P(F_2) \times P_{F_2}(D) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{200} = \frac{1}{200} = 0,005$

ⓓ F_1, F_2, F_3 partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales

$P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) + P(F_3 \cap D)$

$\Rightarrow \quad P(F_3 \cap D) = P(D) - P(F_1 \cap D) - P(F_2 \cap D)$

$= 0,035 - \frac{1}{40} - \frac{1}{200} \quad \Rightarrow \quad P(F_3 \cap D) = 0,005.$

ⓔ $P_{F_3}(D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(F_3)} = 0,03$

II ① X loi exponentielle de paramètre λ

donc par th $P(X > 6) = e^{-6\lambda}$

d'où $P(X > 6) = e^{-6\lambda} \iff 0,3 = e^{-6\lambda}$

$\iff -6\lambda = \ln 0,3 \iff \lambda = -\frac{\ln(0,3)}{6} \simeq 0,2$ à 1

② $P(X \leqslant t) = 0,5 \iff e^{-\lambda t} = 0,5$

$\iff -\lambda t = \ln 0,5$ (car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$)

$\iff t = -\frac{\ln 0,5}{\lambda} \simeq 3,47$ années

c'est-à-dire environ 42 mois.

③ "Le robot dure 2 ans sans panne" est l'événement $X \geqslant 2$.

d'où $P(X \geqslant 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0,4}$.

④ X loi exponentielle $\Rightarrow$ X loi de durée de vie sans vieillissement donc

$$P_{X \geqslant 2}(X \geqslant 6) = P(X \geqslant 4) = e^{-4\lambda} = e^{-0,8} \simeq 0,45 \text{ à } 10^{-2}$$

⑤ On considère l'expérience de Bernoulli consistant à prendre un robot et dont l'issue succès est "le robot n'a pas eu de panne" en 2a avec pour probabilité $p = e^{-0,4}$

On répète 10 fois cette expérience de manière indépendante donc la variable $\tilde{X}$ comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètre $10, e^{-0,4}$: $\tilde{X} = B(10, e^{-0,4})$.

$$\begin{aligned}
P(\tilde{X} \geqslant 2) &= 1 - P(\tilde{X} \leqslant 1) \\
&= 1 - P(\tilde{X} = 0) - P(\tilde{X} = 1) \\
&= 1 - (e^{-0,4})^0 \times (1 - e^{-0,4})^{10} - \binom{10}{1} e^{-0,4} (1 - e^{-0,4})^9 \\
&= 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} - 10e^{-0,4} (1 - e^{-0,4})^9 \\
&\simeq 0,9997 \text{ (à } 10^{-4}\text{)}.
\end{aligned}$$