4 dec 2010.

DS4 - mathématiques TS

I

1) $f_1(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

$= \dfrac{e^{1/x}}{1/x}$

Soit $X = \frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \end{array}\right\}$ ⟹ par composée $\lim\limits_{0^+} f_1 = +\infty$.

$\left.\begin{array}{l} X = \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\}$ ⟹ par composée $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ donc par produit

$\lim\limits_{0^-} f_1 = 0$.

2) $f_2(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+4}$

$= \dfrac{e^{2x}}{x^2} \times \dfrac{1}{1+4/x^2}$

or par th $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty$

d'autre par $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x^2} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

3)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\cos^2 x \geqslant 0$ d'où $\cos^2 x + 2 \geqslant 2$.

⟹ $\ln(\cos^2 x + 2) \geqslant \ln 2$ car $\ln$ st. ↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

⟹ $f_3(x) \geqslant x \ln 2$ ($\times x$ avec $x > 0$)

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln 2 = +\infty$, donc par th. de comparaison, $\lim\limits_{+\infty} f_3 = +\infty$.

4) $f_4(x) = e^{(x^3)} - e^{(x^2)}$

$= e^{(x^3)}\left(1 - e^{x^2-x^3}\right)$

2.

$X = x^2 - x^3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x^3 = -\infty$ part
$\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$
$\Rightarrow$ par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2 - x^3} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{x^2 - x^3} = 1$

d'autre part, par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{(x^3)} = +\infty$ d'où par produit $\lim\limits_{+\infty} f_4 = +\infty$

II $(E_1) \Leftrightarrow e^x(2e^{2x} - 4e^x - 6) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2e^x(e^{2x} - 2e^x - 3) \geq 0.$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 \geq 0$ car $2e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 2X - 3 \geq 0 \\ X = e^x \end{cases}$

Soit $Q(X) = X^2 - 2X - 3$;

$\Delta = 16 \Rightarrow Q$ admet deux racines $X_1 = \frac{2+4}{2} = 3$

$X_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

d'où

X		-1		3	
$Q(X)$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X \leq -1 \text{ ou } X \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \overbrace{e^x \leq -1}^{\text{impossible}}$ ou $e^x \geq 3$

$\Leftrightarrow e^x \geq 3$

$e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$ car ln strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

d'où $\boxed{S = [\ln 3 ; +\infty[}$

III $f_1(x) = \dfrac{x e^{x^2}}{e^{x^2} + 3}$; $x \in \mathbb{R}$

f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de continuité donc f_1 admet des primitives

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2x e^{x^2}}{e^{x^2}+3}}_{u'/u}.$$

d'où $F_1(x) = \frac{1}{2} \ln |e^{x^2}+3| + K$; K constante

d'où $F_1(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{x^2}+3) + K$ car $e^{x^2}+3 > 0$

② $f_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 . \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} . e^{\sqrt{x}}}_{u'e^u}$

f_2 continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ⟹ f_2 admet des primitives.

et $F_2(x) = 2 . e^{\sqrt{x}} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

IV ① $\forall x \neq 0$ $\quad \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x}$

$X = \sin x$

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

$\lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

⟹ par composée $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ par th

donc par produit, $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$

② $f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \times \sqrt{x}$

et d'après ① $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

donc par produit, $\lim_0 f = 0$

D'autre part, $f(0) = 0$ ⟶ f est continue en 0

et f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f continue sur $\mathbb{R}_+$.

③ Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ $\quad x > 0$

$$= \dfrac{\dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

d'où par produit, $\lim\limits_{0} t = +\infty \Rightarrow$ f non dérivable en 0.

V ① si $n \equiv a\ (8)$ alors $n^2 \equiv a^2\ (8)$ par compatibilité avec la puissance d'où le tableau de congruence modulo 8 donnant le reste de la division.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

② ⓐ $(n+4)^2 - 4 \equiv 0 \quad (8)$

$\Leftrightarrow (n+4)^2 \equiv 4 \quad (8) \Leftrightarrow n+4 \equiv 2\ (8)$ ou $n+4 \equiv 6\ (8)$ (d'après ①)

$\Leftrightarrow n \equiv 6\ (8)$ ou $n \equiv 2\ (8)$

donc $S = \{8k+6 ; 8k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow S = \{4k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$

ⓑ $(3n^2+2n+1)^2 - 19 \equiv 0\ (8)$

$\Leftrightarrow (3n^2+2n+1)^2 \equiv 19 \quad (8) \Leftrightarrow (3n^2+2n+1)^2 \equiv 3 \quad (8)$

et cela est impossible d'où $S = \emptyset$

VI ① $f(x) = e^x - x - 1$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivabilité et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$

L'équation de la tangente à C au point d'abscisse a est

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

donc $T_a : y = (e^a - 1)(x-a) + e^a - a - 1 \Leftrightarrow T_a : y = (e^a - 1)x + e^a(1-a) - 1$

② N d'abscisse b et $N \in D$ avec $D : y = x - 1$.

N est le point d'intersect° des droite $\mathcal{T}_a$ et D. Les coordonnées satisfon[t]

le système $\begin{cases} y = (e^a - 1)x + e^a(1-a) - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

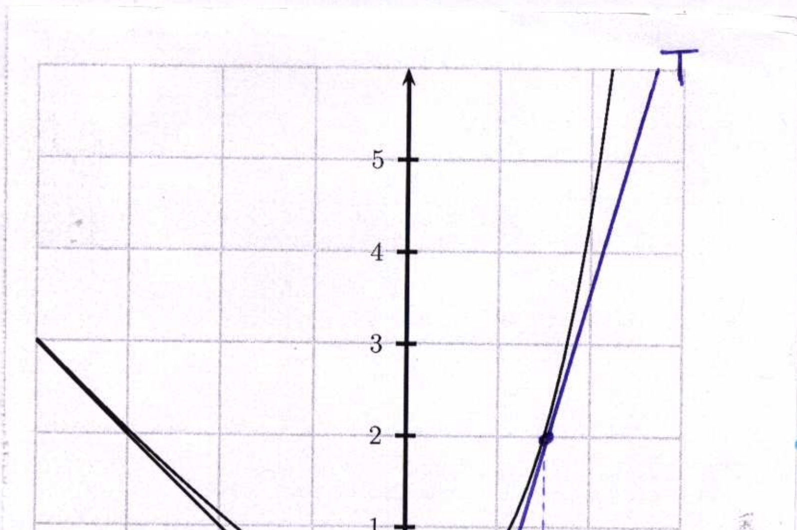
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ -x - 1 = (e^a - 1)x + e^a(1-a) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x e^a + e^a(1-a) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 1 \\ y = a - 2. \end{cases}$

Les coordonnées de N sont $(a-1 ; a-2)$ d'où $b = a - 1$

③ La tangente T au point d'abscisse $1,5$ coupe la droite D au point d'abscisse $b = 1,5 - 1 = 0,5$.

Nous avons donc 2 points pour T d'où sa construct°.



VII I ① $(E_2) : x^2 = 2^x$

$2^2 = 2^2 \Rightarrow$ 2 solut° de (E_2).

$4^2 = 16$ et $2^4 = 16 \Rightarrow$ 4 solut° de (E

② On a $(E_a) : x^a = a^x$

et $a^a = a^a$! d'où a solution de

③ $h(x) = x - e\ln x$

ⓐ par th $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

d'où $\lim\limits_{0} h = +\infty$.

$\forall x > 0$, $h(x) = x\left(1 - e\dfrac{\ln x}{x}\right)$

et par th. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

d'où par produit $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

(b) h dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivation et

$h'(x) = 1 - \frac{e}{x}$

d'où $h'(x) > 0 \iff 1 - \frac{e}{x} > 0$

$\iff \frac{e}{x} < 1 \iff \frac{x}{e} < 1$ (car $x \longmapsto \frac{1}{x}$ décroissante

$\iff x < e$.

d'où le tableau de variations de h:

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) x solution de $(E_e) \iff x^e = e^x$

$\iff e^{e\ln x} = e^x$

$\iff e\ln x = x$ (car $\ln \circ \exp = id$)

$\iff x - e\ln x = 0$

$\iff h(x) = 0$

or d'après le tableau de variation, $h(x) = 0 \iff x = e$.

d'où (E_e) admet e pour unique solution.

II (1) x solution de $(E_a) \iff x^a = a^x$

$\iff e^{a\ln x} = e^{x\ln a}$

$\iff a\ln x = x\ln a$ (car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$)

$\iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$

(2) (a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{+\infty} f = 0$ par th $\Rightarrow$ l'axe des abscisse est asymptote à C_f

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ par th donc par quotient $\lim_{0} f = -\infty$

$\Rightarrow$ l'axe des ordonnée est asymptote à C_f

(b) f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x . \frac{1}{x} - \ln x\right)$

$= \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

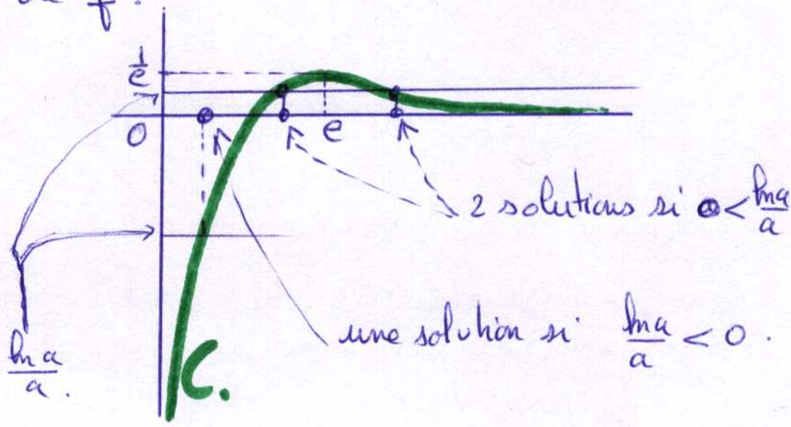
$f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln x$.

d'où $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0$

$\iff \ln x < 1 \iff x < e$ (car exp s.↑ sur $\mathbb{R}$).

D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		e	
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$1/e$	↘ 0



③ (Ea) $\iff f(x) = \frac{\ln a}{a}$.

• Si $a \in]0;1]$, $\frac{\ln a}{a} \leq 0$ et le graphique de f nous permet de conclure que $f(x) = \frac{\ln a}{a}$ n'a qu'une seule soluti

• Si $a \in [1; e[\cup]e; +\infty[$ alors d'après le tableau de variation de f nous avons $f(a) > 0$ et $f(a) < \frac{1}{e}$

c'est-à-dire $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$.

donc d'après la courbe représentative de f, $f(x) = \frac{\ln a}{a}$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $]1; e[$, l'autre dans $]e, +\infty[$.

(voir graphique)