31 mars 2011

DS 7

I

$I = \int_0^1 2^x 3^{x+1} dx = \int_0^1 6^x \times 3\, dx$

$= 3\int_0^1 e^{x\ln 6} dx = \frac{3}{\ln 6}\int_0^1 \underbrace{\ln 6\, e^{x\ln 6}}_{u'} dx = \frac{3}{\ln 6}\left[e^{x\ln 6}\right]_0^1$

$= \frac{3}{\ln 6}\left(e^{\ln 6} - 1\right)$

$= \frac{15}{\ln 6}$.

$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$ et $\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1 \implies \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x + 1}{2} dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} 2\cos(2x) dx + \int_0^{\pi} \frac{dx}{2}$ (par linéarité de l'intégrale)

$= \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

II

1) Pour $x \in [1; e]$ on a $1 \leq x \leq e$

donc $0 \leq \ln x \leq 1$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

$\underline{\forall x \in \mathbb{N}} \implies (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$ $(\times (\ln x)^n$ avec $(\ln x)^n >$

$\implies x^2(\ln x)^{n+1} \leq x^2(\ln x)^n$

et les bornes étant dans l'ordre $(1 \leq e)$ on a par intégration de l'inégali

$\int_1^e x^2(\ln x)^{n+1} dx \leq \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$ c'est-à-dire $I_{n+1} \leq I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

c'est donc que la suite (I_n) est décroissante.

2) $\forall x \in [1, e]$; $\ln x > 0$ donc $(\ln x)^n > 0$ et par produit $x^2(\ln$

On déduit donc par th de positivité que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n \geq 0$.

donc (I_n) décroissante et minorée par 0 $\implies$ (I_n) convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

③ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx.$$

Soit u, v, u', v' continues sur $[1;e]$ avec

$u(x) = (\ln x)^{n+1}$; $u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$; $v(x) = \frac{x^3}{3}$

Alors par intégration par parties, $I_{n+1} = \left[(\ln x)^{n+1} \times \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{x^2}{3}(\ln x)^n dx$

donc $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}(n+1) I_n$

d'où finalement $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

④ On déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3I_{n+1}}{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = l$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0$

d'où par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

⑤ Question Joker : Quelle est la limite de (nI_n) ?

on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $nI_n = e^3 - I_n - 3I_{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = e^3$.

III ① $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$; $D = \mathbb{R}_+$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivat° et

$\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}\left((x+3) \times \frac{1}{x+3} - \ln(x+3)\right)$

$= \frac{1}{(x+3)^2}\left(1 - \ln(x+3)\right)$

donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x+3)$.

d'où $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln(x+3) > 0$

$\iff \ln(x+3) < 1$

$\iff x+3 < e$ car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$\iff x < e-3$, et $e-3<0$ donc sur $\mathbb{R}_+$ on a toujours $f'(x)<$

On déduit alors le tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	$\searrow$	0

$$\left.\begin{array}{l} X = x+3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

② ⓐ f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x \in [n, n+1]$ on a $n \leq x \leq n+1 \Longrightarrow f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$

donc $\forall x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

ⓑ On en déduit par intégration de l'inégalité sur $[n, n+1]$ avec les bornes dans l'ordre

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Longrightarrow f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

ⓒ $\forall n\in\mathbb{N}$, d'après ⓑ on a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

et $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$

donc $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$. $\forall n\in\mathbb{N}$. $(*)$

donc (u_n) est décroissante.

juste mais inutile.

d'après ①, $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le th de positivité avec les bornes dans l'ordre $(n < n+1)$ on a

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq 0.$$

donc (u_n) décroissante et minorée par 0 donc par th (u_n) converge

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ donc d'après $(*)$ avec le th des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

③ ⓐ $F(x) = (\ln(x+3))^2$

$x \longmapsto x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[3, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$

$X \longmapsto \ln X$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$Y \longmapsto Y^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc par composée $x \longmapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et $\forall x \geqslant 0$, $F'(x) = 2\ln(x+3) \times \dfrac{1}{x+3}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^n F'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\ln(x+3))^2\right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2\right)$$

④ $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$

$$= \int_0^n f(x)\,dx \quad \text{(par relation de Chasles)}$$

$$= I_n.$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty\end{array}\right\}$ donc par composée $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+3) = +\infty$

et donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(n+3))^2 = +\infty$

d'où par somme et quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

donc (S_n) diverge vers $+\infty$.

IV A

1) $f(x) = x \iff -\ln(x^2+1) = 0$

$\iff x^2+1 = 1$

$\iff x^2 = 0 \iff x = 0.$

$f(x)=x$ a pour unique solution $x=0$.

2) f est dérivable sur $[0;1]$ d'après les règles de dérivation

et $\forall x \in [0;1]$ $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

et $\forall x \in [0,1]$; $x^2+1>0$; $(x-1)^2 \geq 0$ donc par quotient $f'(x) \geq 0$ sur $[0,1]$

Donc f est strictement croissante sur $[0;1]$ d'où le tableau de variation de f

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$

donc $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ car f strictement croissante sur $[0,$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1-\ln 2$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \in [0,1]$

B

1) $u_0 = 1$; $u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$ d'où la construct° de u_0, u_1, u_2, u_3

2) Soit P_n la propriété $u_n \in [0,1]$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Etape 1 : pour $n=0$; $u_0 = 1 \Rightarrow P_0$ vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow u_q \in [0,1] \Rightarrow f(u_q) \in [0;1] \Rightarrow u_{q+1} \in [0,1] \Rightarrow P_{q+1}$ vraie

(d'après A2)

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$= -\ln(u_n^2+1)$

et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [0,1] \Rightarrow u_n^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(u_n^2+1) \geq 0$

$\Rightarrow -\ln(u_n^2+1) \leq 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) décroissante

(4) (u_n) décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers $\ell \in [0,1]$.

$u_{n+1} = f(u_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.
(u_n) converge vers $\ell \in [0,1]$
f continue sur $[0,1]$
$\Big\}$ donc d'après le th du point fixe $\ell = f(\ell)$

donc d'après (A1) $\ell = 0$.