Bac Blanc. Février 2012.

I

1) $z' = \dfrac{iz}{z+1}$

$M = M' \iff \dfrac{iz}{z+1} = z$

$\iff iz = z(z+1)$

$\iff z(z+1) - iz = 0 \iff z(z+1-i) = 0$

$\iff z = 0$ ou $z = i-1$

f admet deux points fixes : O et $M(i-1)$.

2) $\forall M \neq A$ et $\forall M \neq O$ on a $z' = \dfrac{iz}{z+1}$

donc par passage au module $|z'| = \dfrac{|iz|}{|z+1|}$

d'où $OM' = \dfrac{OM}{AM}$

d'autre part

$(\vec{u}, \vec{OM'}) = \arg(z') \quad (2\pi)$

$= \arg\left(\dfrac{iz}{z+1}\right) \quad (2\pi)$

$= \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z - z_O}{z - z_A}\right) \quad (2\pi)$

$= \dfrac{\pi}{2} + (\vec{MA}, \vec{MO}) \quad (2\pi)$

donc on a bien $(\vec{u}, \vec{OM'}) = \dfrac{\pi}{2} + (\vec{MA}, \vec{MO}) \quad (2\pi)$.

③ ⓐ Voir figure

ⓑ $b' = \dfrac{i(-\frac{1}{2}+i)}{-\frac{1}{2}+i+1}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}i-1}{\frac{1}{2}+i}$

$= \dfrac{-i-2}{1+2i}$

$= \dfrac{-(2+i)(1-2i)}{5} = -\frac{1}{5}(4-3i)$

on a $OB'^2 = |b'|^2 = \frac{1}{25}\times(16+9) = 1$ donc $OB' = 1$

donc $B' \in \mathcal{C}$.

ⓒ $M \in \Delta \iff OM = OA$ donc $OM' = \dfrac{OM}{OA} = 1$

d'où $M' \in \mathcal{C}$.

ⓓ AOC équilatéral direct $\Rightarrow CO = CA$

$\Rightarrow C \in \Delta$ médiatrice de $[OA]$

donc d'après ⓒ $C' \in \mathcal{C}$.

d'autre part d'après ② $(\vec{u}, \vec{OC'}) = (\vec{CA}, \vec{CO}) + \frac{\pi}{2}$ (2π)

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ (2π)

$= \frac{5\pi}{6}$ (2π)

d'où $(\vec{u}, \vec{OC'}) = \frac{5\pi}{6}$ (2π) et $C' \in \mathcal{C}$; ce qui permet la construct° de C'

④ ⓐ Soit $z = x+iy$; $x, y \in \mathbb{R}$

alors $z' = \dfrac{i(x+iy)}{(x+iy)+1}$

$= \dfrac{i(x+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$

(

d'où $z' = \dfrac{i\left(x(x+1)+y^2+i((x+1)y-xy)\right)}{(x+1)^2+y^2}$

$$= \frac{i(x^2+x+y^2)-y}{(x+1)^2+y^2}$$

En particulier $\operatorname{Im}(z') = \dfrac{x^2+x+y^2}{(x+1)^2+y^2}$

$M(x+iy) \in \Gamma$ avec $M \neq O$ et $M \neq A$ $\iff M' \in (O,\vec{u})$ $M\neq O$; $M \neq A$

$\iff \operatorname{Im}(z')=0$; $M \neq O$; $M\neq A$

$\iff x^2+x+y^2=0$; $M\neq O$; $M \neq A$

$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ $M\neq O$; $M\neq A$

d'où Γ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2};0)$ et rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A.

(b) $M \in \Gamma$ avec $M \notin \{O,A\}$ $\iff M' \in (O,\vec{u})$ et $M \notin \{O,A\}$

$\iff \operatorname{Arg}(z') = 0\ (\pi)$ et $M \notin \{O,A\}$

$\iff \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) = 0\ (\pi)$ d'après ② et $M \notin \{O,A\}$

$\iff (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ et $M\notin\{O,A\}$

donc Γ est le cercle de diamètre $[OA]$ privé de O et A.

(II)

(1) (a) Voir graphique

(b) on conjecture que (u_n) est décroissante et (u_n) converge vers $\ell = 1$

(2) (a) et (b)

$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$; $x > -1$

f est dérivable d'après les règles de dérivabilité et

$\forall x > -1$; $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

Soit P_n la propriété $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Etape 1 : pour $n=0$; $u_0 = 4$ et $u_1 = f(4) = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} = 2,2$

Donc on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0$ d'où P_0 est vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie donc $1 \leq u_{q+1} \leq u_q$

$\Rightarrow f(1) \leq f(u_{q+1}) \leq f(u_q)$ car f croissante sur $]-1, +\infty[$

$\Rightarrow 1 \leq u_{q+2} \leq u_{q+1} \Rightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

en particulier (u_n) est décroissante et (u_n) est minorée par 1

(c) (u_n) décroissante et (u_n) minorée par 1 $\Rightarrow (u_n)$ converge vers $\ell \geq 1$

$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \geq 1 \\ f \text{ est continue en } \ell \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Th du pt fixe}} f(\ell) = \ell$

et $f(\ell) = \ell \iff 3 - \frac{4}{\ell+1} = \ell \iff \frac{3(\ell+1) - 4 - \ell(\ell+1)}{\ell+1} = 0$

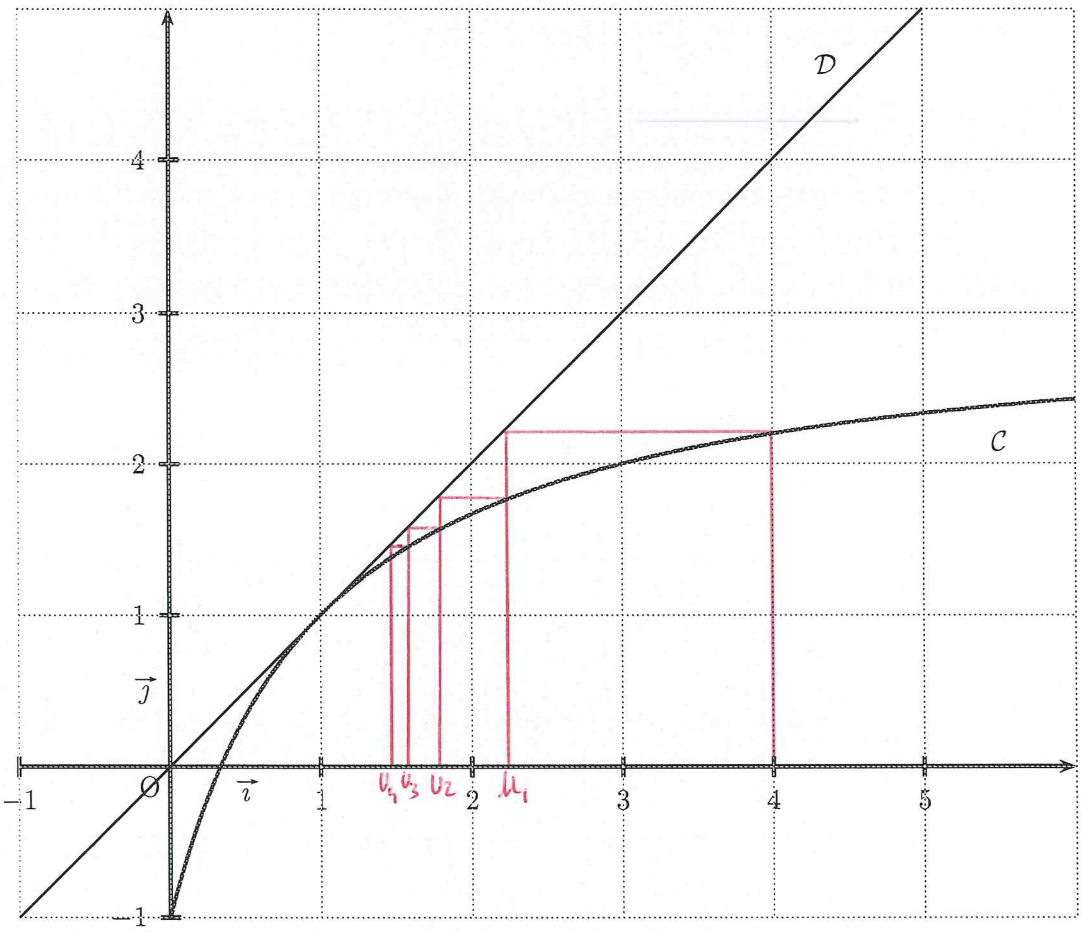
$\iff 3(\ell+1) - 4 - \ell(\ell+1) = 0$

$\iff -\ell^2 + 2\ell - 1 = 0 \quad \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell = 1$

Donc (U_n) converge vers $\ell = 1$

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)



III) A) 1) $u(x) = -\frac{b}{a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $au(x) + b = a \times (-\frac{b}{a}) + b = 0$

et $u'(x) = 0$

Donc on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = au(x) + b$ d'où u solution de (E).

2) $f-u$ solut° de $y' = ay$

$\iff (f-u)' = a(f-u)$

$\iff f' - af = u' - au$

$\iff f' - af = b$ car u sol de (E) d'où $u' - au = b$.

$\iff f' = af + b$

$\iff f$ solution de (E).

3) D'après 2) : f solution de (E) $\iff$ $f-u$ solut° de $y' = ay$

$\iff$ il existe K constante telle que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - u(x) = Ke^{ax}$ (d'après le résultat donné)

$\iff f(x) = Ke^{ax} + u(x)$

$\iff f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Les solutions de (E) sont bien les fonctions f s'écrivant

$f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $x \in \mathbb{R}$ avec K constante

(B) (1) $10v'(t)+v(t)=30$

$\iff \quad v'(t) = -\frac{1}{10}v(t)+3$

On reconnait une équation differentielle de la forme $y'=ay+b$

les solutions sont les fonctions

$$v(t) = Ke^{-\frac{1}{10}t}+30. \quad \text{avec } K \text{ constante}$$

et $v(0)=0 \iff K+30=0 \iff K=-30$

d'où $v(t) = -30e^{-t/10}+30$

$\iff \quad v(t) = 30\left(1-e^{-t/10}\right)$

(2) (a) v dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivabilité

d'où $v'(t) = 30 \times \frac{1}{10}e^{-t/10}$

$= 3e^{-t/10} > 0$ car $e^X > 0 \ \forall X \in \mathbb{R}$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}_+ ; \quad v'(t) > 0$ donc v est strictement croissante.

(b) $\left.\begin{array}{l} X = -t/10 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} -t/10 = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ par composée $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t/10} = 0$

d'où par somme et produit $\lim\limits_{+\infty} v = 30.$

(3) $v'(t) < 0{,}1 \iff 3e^{-t/10} < \frac{1}{10}$

$\iff e^{-t/10} < \frac{1}{30}$

$\iff -\frac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right)$ car $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Longleftrightarrow \quad t > -10 \ln \frac{1}{30} \quad \Longleftrightarrow t > 10 \ln(30) \simeq 34{,}01$

d'où à partir de $t = 35\,s$ la vitesse du cycliste peut être considérée comme stabilisée.

IV (A) $g(x) = e^x - x - 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}_+$

① g dérivable d'après les règles de dérivation et

$\forall x \geq 0 \; ; \; g'(x) = e^x - 1$

$$g'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1$$
$$\iff x \geq 0 \quad \text{(car fn strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^{*}\text{)}$$

d'où sur $\mathbb{R}_+$, $g'(x) \geq 0$ et donc g est croissante.

② Dressons le tableau de variation de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

$\forall x \geq 0$; on a $g(x) \geq g(0)$ (car g croissante sur $\mathbb{R}_+$.

et donc $g(x) \geq 0$.

D'où le signe de $g(x)$ est positif sur $\mathbb{R}_+$

③ On a donc $\forall x \geq 0$; $e^x - x - 1 \geq 0$

$\iff e^x - x \geq 1$ et donc $e^x - x > 0$.

(B) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

① $\forall x \in [0;1]$ on a $0 \leq x \leq 1$

$\implies f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\implies 0 \leq f(x) \leq \dfrac{e-1}{e-1}$

$\implies 0 \leq f(x) \leq 1 \implies f(x) \in [0;1]$

On a donc bien $x \in [0;1] \implies f(x) \in [0;1]$

② ⓐ
$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x$$
$$= \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x}$$
$$= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$$

D'autre part $(1-x)g(x) = (1-x)(e^x - x - 1)$

$= e^x - x - 1 - xe^x + x^2 + x$

$= e^x - 1 - xe^x + x^2$

On a donc bien $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

ⓑ La position relative de D et C est donnée par le signe de $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

et sur $\mathbb{R}_+$; $g(x) \geq 0$; $e^x - x > 0$

donc le signe de $f(x)-x$ est celui de $1-x$.

La position relative de D et C est donc donnée par le tableau suivant

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

Sur $[0;1]$ on a $\mathcal{C}$ au dessus de D

Sur $[1,+\infty[$ on a D au dessus de $\mathcal{C}$

③ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

donc f admet pour primitive $F(x) = \ln|e^x - x| + K$; $x \in \mathbb{R}_+$

or sur $\mathbb{R}_+$; $e^x - x > 0$ donc $F(x) = \ln(e^x - x) + K$.

(V) $f(x) = \ln x - 2 + x$. $x \in]0, +\infty[$.

(1) $\lim\limits_{0} f = -\infty$ car $\lim\limits_{0} \ln = -\infty$

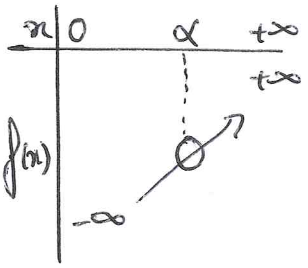
$\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

(2) f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{x} + 1$

$\frac{1}{x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc f est strictement croissante sur

(3)



f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
f est continue car dérivable
$\lim\limits_{0} f = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$
$0 \in]-\infty, +\infty[$

Donc d'après le th de la bijection il existe $\alpha \in]-\infty, +\infty[$ unique tel que $f(\alpha) = 0$

IV Spécialité.

(u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n + 21 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

① $u_1 = 10u_0 + 21 \Rightarrow u_1 = 31$

$u_2 = 10u_1 + 21 \Rightarrow u_2 = 331$

$u_3 = 10u_2 + 21 \Rightarrow u_3 = 3331$

② ⓐ Soit P_n la propriété $3u_n = 10^{n+1} - 7$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Etape 1 : pour $n = 0$; $3u_n = 3u_0 = 3$

et $10^{n+1} = 10 - 7 = 3$ donc on a bien $3u_0 = 10^{0+1} - 7$

$\Rightarrow P_0$ vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow 3u_q = 10^{q+1} - 7$

donc $3u_{q+1} = 3 \times (10u_q + 21)$

$= 10 \times 3u_q + 63$

$= 10 \times (10^{q+1} - 7) + 63$ (car P_q est vraie)

$= 10^{q+2} - 7$

$\Rightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire $3u_n = 10^{n+1} - 7$

ⓑ Méthode 1 :

On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $3u_n = 10^{n+1} - 7$

$= \underbrace{999 \ldots 9}_{n-1 \text{ fois}}3$

$= 9.10^n + 9.10^{n-1} + \ldots + 9 \times 10 + 3$

D'où par quotient $u_n = 3.10^n + 3.10^{n-1} + \ldots + 3 \times 10 + 1$

Donc $u_n = \underbrace{33 \ldots 3}_{n-1 \text{ fois}}1$

Methode 2 : $\underbrace{33\ldots3}_{n-1 \text{ fois}}1 = 3.10^n + 3.10^{n-1} + \ldots + 3.10 + 1$

$= 3(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10) + 1$

$= 3 \times 10(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) + 1$

$= 30 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} + 1$ (somme des termes d'une suite géométrique)

$= \frac{10 \times (10^n - 1) + 1}{3}$

donc $3 \times \underbrace{33\ldots3}_{n-1 \text{ fois}}1 = 10(10^n - 1) + 3$

$= 10^{n+1} - 7$

$= 3u_n$ d'où $u_n = 33\ldots31$

③ $u_2 = 331$

$\sqrt{u_2} \simeq 18,2.$

Testons la divisibilité de u_2 par les nombres premiers inférieurs à 18

331 impair donc non divisible par 2.

par critère de divisibilité 3 ; 5 ; 11 ne divise pas 331

$331 = 7 \times 47 + 2$ => 7 ne divise pas 331

$331 = 13 \times 25 + 6$ => 13 ne divise pas 331

$331 = 17 \times 19 + 8$ => 17 ne divise pas 331

donc par théorème 331 est un nombre premier.

④ $u_n = \underbrace{33\ldots3}_{n-1 \text{ fois}}1$

donc u_n impair d'où 2 ne divise pas u_n.

et u_n se termine par 1 donc par critère de divisibilité 5 ne divise pas u_n

La somme des chiffres composant u_n est congrue à 1 modulo 3 d'où par critère de divisibilité 3 ne divise pas u_n.

⑤ ⓐ $10 \equiv -1 \ (11)$ et $-7 \equiv 4 \ (11)$

donc par compatibilité de la congruence avec la somme et les puissances l'on a

$3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv (-1)^{n+1} + 4 \ (11)$

$\equiv 4 - (-1)^n \ (11)$

(b) On déduit que suivant les valeurs de n, $3u_n \equiv 5\ (11)$ ou $3u_n \equiv 3\ (11)$

donc $3u_n$ n'est pas divisible par 11 $\forall n \in \mathbb{N}$.

d'où 11 ne divise pas u_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

6 (a) 17 est premier et 10 non divisible par 17

donc d'après le petit théorème de Fermat

$$10^{17-1} \equiv 1\ (17) \quad \text{c'est-à-dire} \quad 10^{16} \equiv 1\ (17)$$

(b) $\forall k \in \mathbb{N}$ $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7$ d'après (2a)

$$= (10^{16})^k \times 10^9 - 7$$

$$\equiv 10^9 - 7 \quad (17)$$

$$\equiv -7^9 - 7 \quad (17)$$

$$\equiv -7(49^4 + 1) \equiv -7((-2)^4 + 1) \equiv -7 \times 17 \equiv 0\ (17)$$

d'où $17 \mid 3u_{16k+8}$ et $17 \wedge 3 = 1$

donc d'après le th de Gauss $17 \mid u_{16k+8}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

V (1) Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 2004 et 4002 :

a	b	r
4002	2004	1998
2004	1998	6
1998	6	0

d'où le PGCD étant le dernier reste non nul on a PGCD(2004 ; 4002) = 6.

donc la proposit° est vraie.

(2) Déterminons le reste de 2^n modulo 9 suivant les valeurs de n.

$2 \equiv 2\ (9)$

$2^2 \equiv 4\ (9)$

$2^3 \equiv (-1)\ (9)$ d'où $2^6 \equiv 1\ (9)$ donc $2^6 - 1 \equiv 0\ (9)$

d'où pour $n = 6$: $2^n - 1$ est divisible par 9. La proposit° est fausse