I

1) $P(x) = x^2 + 2mx + m + 2$.

$\Delta = 4m^2 - 4m - 8$
$= 4(m^2 - m - 2)$

Considérons $\varphi(m) = m^2 - m - 2$.

$\Delta_\varphi = 1 + 8 = 9$ donc φ admet 2 racines : $m_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$m_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

Le signe de Δ étant donné par celui de φ on déduit le tableau de signe de Δ :

m		-1		2	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

donc pour $m \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$; P admet 2 ra

pour $m \in \{-1 ; 2\}$; P admet une racin
dou

pour $m \in]-1 ; 2[$; P n'a pas de racine

2) 2 racine de P $\Leftrightarrow P(2) = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4m + m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5m = -6 \Leftrightarrow m = -\frac{6}{5}$.

pour $m = -\frac{6}{5}$; 2 est racine de P.

II

$\frac{1}{1-x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-(1-x^2)}{1-x^2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{+x^2}{1-x^2} \leqslant 0$.

x		-1		0		1	
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x^2}{1-x^2}$	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	$\|$	$-$

donc $S =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\cup \{0$

III $f(x) = x\,E(x)$

1. pour $x \in [-1;1]$ on a $|E(x)| \leq 1$

donc $|xE(x)| \leq |x|$ c'est-à-dire $|f(x)| \leq |x|$

et $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ donc par th des gendarmes $\lim_0 f = 0$.

et $f(0) = 0$ donc finalement f continue en 0.

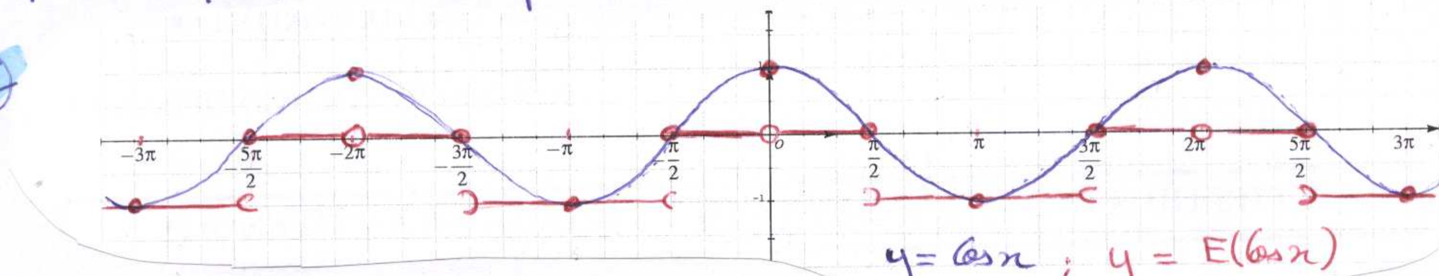
Rq On peut aussi faire avec la limite à droite et à gauche

2. $\lim_{1^+} E = 1$ (par th)
$\lim_{x\to 1} x = 1$
$\Big\}$ par produit $\Longrightarrow$ $\lim_{1^+} f = 1$

$\lim_{1^-} E = 0$ (par th)
$\lim_{x\to 1^-} x = 1$
$\Big\}$ par produit $\Longrightarrow$ $\lim_{1^-} f = 0$.

$\lim_{1^+} f \neq \lim_{1^-} f \Rightarrow$ f non continue en $x = 1$

IV



V $f_1(x) = \dfrac{x-4}{-x^2+x+2}$; f_1 fraction rationnelle $\Rightarrow \lim_{+\infty} f_1 = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{-x^2} = 0$

Soit $p(x) = -x^2 + x + 2$.

$\Delta = 9 \Rightarrow$ p admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$

d'où le signe de p :

x		-1		$+2$	
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $\lim_{x\to 2^+} (-x^2+x+2) = 0^-$ et $\lim_{x\to 2^-} x-4 = -2$

donc par quotient, $\lim_{2^+} f_1 = +\infty$.

$$f_2(x) = \frac{3x - x^2}{|x-3|} = \begin{cases} \dfrac{3x-x^2}{x-3} & \text{si } x \geqslant 3 \\ \dfrac{3x-x^2}{3-x} & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

et $3x - x^2 = x(3-x$

$$= \begin{cases} -x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

finalement, $\lim\limits_{-\infty} f_2 = -\infty$ et $\lim\limits_{3^+} f_2 = -3$; $\lim\limits_{3^-} f_2 = 3$

$f_3(x) = x + \sqrt{x^2-4}$

$$= \frac{(x - \sqrt{x^2-4})(x + \sqrt{x^2-4})}{x - \sqrt{x^2-4}} = \frac{x^2 - (x^2-4)}{x - \sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{x - \sqrt{x^2-4}}.$$

$X = x^2 - 4$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\}$ $\overset{\text{par composée}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc par différence $\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2-4} = -\infty$

et par quotient, $\lim\limits_{-\infty} f_3 = 0$.

$$f_4(x) = \frac{5 + 3x \sin x}{x^2 + 5}$$

$\forall x < 0$; $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\Longleftrightarrow -3x \geqslant 3x \sin x \geqslant 3x$ $(\times 3x)$ avec $3x < 0$)

$\Longleftrightarrow 5 - 3x \geqslant 5 + 3x \sin x \geqslant 3x + 5$

$\Longleftrightarrow \dfrac{5-3x}{x^2+5} \geqslant \dfrac{5+3x\sin x}{x^2+5} \geqslant \dfrac{3x+5}{x^2+5}$ $(\div\, x^2+5$ avec $x^2+5>0)$

et par th du plus haut degré, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5-3x}{x^2+5} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+5}{x^2+5} = 0$

donc d'après le th des gendarmes $\lim\limits_{-\infty} f_4 = 0$.

$f_5(x) = \frac{\sin(7x)}{2x^2} = \frac{\sin(7x)}{7x} \times \frac{7}{2x}$

$X = 7x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 7x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{par quotient}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{7x} = 1$

d'autre part $\lim\limits_{0^+} \frac{7}{2x} = +\infty$; $\lim\limits_{0^-} \frac{7}{2x} = -\infty$

donc par produit $\lim\limits_{0^+} f_5 = +\infty$; $\lim\limits_{0^-} f_5 = -\infty$.

VI pour $x > 1$, $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

$= \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$

$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{1^+} f = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

pour $x \leq 1$ $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$ donc $\lim\limits_{1^-} f = f(1) = \frac{1}{4}$.

finalement, $f(1) = \lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{1^-} f$ donc f continue en 1

VII $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 3$

① f dérivable d'après les règles de dérivation et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x$

$= 12x(x^2 - 2x - 3)$

Soit $\varphi(x) = x^2 - 2x - 3$

$\Delta = 16 \Rightarrow \varphi$ a deux racines $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$; $x_2 = -1$

D'ou le tableau de signes de $f'(x)$:

		-1		0		3	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\varphi(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

d'autre part f est un polynôme donc d'après la règle du plus haut degré

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

on déduit le tableau de variations de f

x		-1		0		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-4	↗	3	↘	-132	↗ $+\infty$

$f(-1) = 4$

$f(0) = 3$

$f(3) = -132$

② Sur $[0,3]$:
- f continue (car dérivable)
- f strictement décroissante
- $f(0) = 3$; $f(3) = -132$
- $0 \in [-132 ; 3]$

donc d'après le th de la bijection, il existe α unique racine de f sur $[0,3]$.

par balayage à la calculatrice on a. $f(0,38) > 0$; $f(0,39) < 0$

Donc $\alpha \simeq 0,38$ (à 10^{-2} par défaut)