TS3 # DS 2 10 oct 2011

I ① $g(x) = x^3 - 3x - 4$; $x \in \mathbb{R}$

ⓐ g dérivable d'après le tableau de variations.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x-1)(x+1)$

d'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

par th $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$

ⓑ Sur $]-\infty ; 1]$, -2 est le maximum donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $[1 ; +\infty[$;

g est continue car dérivable
g strictement croissante
$g(1) = -6$; $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.
$0 \in [-6 ; +\infty[$

donc d'après le th de la bijection, il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ unique tel que $g(\alpha)$

par balayage à la calculatrice on a

$g(2{,}19) = -0{,}066$
$g(2{,}2) = 0{,}048$ $\Rightarrow$ $\alpha \in [2{,}19 ; 2{,}2]$

ⓒ Sur $]-\infty ; 1]$ -2 étant le maximum de g on déduit $g(x) < 0$.

Sur $[1, +\infty[$ g étant croissante on déduit que

pour $1 \leq x \leq \alpha$ on a $g(x) \leq g(\alpha)$ donc $g(x) \leq 0$

et pour $x \geq \alpha$ on a $g(x) \geq g(\alpha)$ donc $g(x) \geq 0$.

Finalement le signe de g est donné par le tableau suivant :

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

② ⓐ f dérivable sur $]1,+\infty[$ d'après les règles de dérivabilité

$\forall x>1$; $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(3x^2+4x) - 2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x}{(x^2-1)^2} \times g$$

et sur D; $x>0$; $(x^2-1)^2>0$ donc $f'(x)$ et du même signe que $g(x)$.

ⓑ par th $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 = 0^+$ (d'après le signe de x^2-1)

donc $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$

x		-1		$+1$	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

On déduit le tableau de variations de f

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ⓒ $\forall x>1$, $f(x)-(x+2) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1} - (x+2)$

$$= \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - \frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}\left(x^3+2x^2-x^3-2x^2+x\right.$$

$$= \frac{1}{x^2-1}(x+2)$$

et par th $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = 0$ donc C_f et $D: y=x+2$ sont asymptotes en $+\infty$

La posit° relative de D et C_f est donnée par le signe de $h(x)=f(x)-(x+2)$
$= \dfrac{x+2}{x^2-1}$

et sur $[1;+\infty[$; $x^2-1>0$; $x+2>0$

d'où $h(x)>0$ et donc C_f est au-dessus de C_g.

Ⅲ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(\cos(x^2)+4)'}{2\sqrt{\cos(x^2)+4}} = \dfrac{-2x\sin(x^2)}{2\sqrt{\cos x^2+4}} = -\dfrac{x\sin x^2}{\sqrt{\cos x^2+4}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x) = 7\left(\cos(2x^2+3)\right)^6\left(-4x\sin(2x^2+3)\right)$

$= -28x\sin(2x^2+3)\left(\cos(2x^2+3)\right)^6.$

III ① pour $x < 1$; $f(x) = \sqrt{1-x}$

$\left.\begin{array}{l} X = 1-x \\ \lim\limits_{x\to 1} 1-x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \sqrt{X} = 0 \end{array}\right\}$ $\overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{1^-} f = 0.$

pour $x > 1$, $f(x) = x^2 - 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f = 0.$

de plus $f(0) = 0$ d'où $\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{1^-} f = f(0)$ donc f continue en 0.

② Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ $x \neq 1$

$= \dfrac{f(x)}{x-1}$

pour $x > 1$; $t(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$ et donc $\lim\limits_{1^+} t = 2$

pour $x < 1$; $t(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1} = -\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

et $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0^+$ donc par inverse et produit $\lim\limits_{1^-} t = -\infty$.

On déduit donc que f n'est pas dérivable en 1 mais que f admet deux demi-tangentes en $x = 1$

Une demi-tangente verticale à gauche et une demi tangente de coeff directeur 2 à droite.