DS 6

I

(E) : $xy' - (2x+1)y = 8x^2$

(E') : $y' = 2y + 8$

1 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ solution de (E')

$\iff g'(x) = 2g(x) + 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\iff \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2\left(\frac{f(x)}{x}\right) + 8$

$\iff \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{2f(x)}{x} + 8$

$\iff xf'(x) - f(x) = 2xf(x) + 8x^2$

$\iff xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2 \iff f$ solution de (E).

2 (E') est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$
les solutions sont les fonctions de la forme
$f(x) = Ke^{2x} - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. avec K constante.

D'après ① f solution de (E) $\iff \frac{f(x)}{x}$ solution de (E')

$\iff \frac{f(x)}{x} = Ke^{2x} - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, K constant

$\iff f(x) = x(Ke^{2x} - 4)$

Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme
$f(x) = x(Ke^{2x} - 4)$

3 $A(\ln 2 ; 0) \in \mathcal{C} \iff f(\ln 2) = 0$

$\iff \ln 2 (Ke^{2\ln 2} - 4) = 0$

$\iff \ln 2 (4K - 4) = 0 \iff 4K = 4 \iff K = 1$

la fonction $f(x) = x(e^{2x} - 4)$ est solut° de (E) et satisfait $A \in \mathcal{C}$

(II) $f(x) = \dfrac{\quad}{e^x - x}$; $x \in \mathbb{R}$

(1) $g(x) = e^x - x - 1$

(a) g dérivable d'après les règles de dérivation.

$g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) \geq 0$

$\iff e^x \geq 1$

$\iff x \geq 0.$

D'où le tableau de variations de g.

x		0	
$g'(x)$	$-$	$\mid$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le minimum de g est 0 donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

(b) $g(x) \geq 0 \iff e^x - x - 1 \geq 0$

$\iff e^x - x \geq 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - x \neq 0$

et donc par quotient f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$

d'après le th de croissance comparée $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1$ et donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$ et donc par quotient $\lim\limits_{-\infty} f = 0$

On déduit donc que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et la droite d'éq $y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

(b) f dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivation.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{(e^x - x) - (e^x - 1)x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $(e^x - x)^2 > 0$ et $e^x > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

d'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

(c) T tangente au point d'abscisse 0 d'où

$$T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\Rightarrow T : y = x$$

La position relative de C et T est donnée par le signe de

$$h(x) = f(x) - x$$

$$= \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x}$$

$$= \frac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x} = \frac{-x\,g(x)}{e^x - x}$$

or nous avons vu que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$; $e^x - x > 0$

donc le signe de h est celui de $-x$.

Finalement, pour $x > 0$, $h(x) < 0$ et donc C est en dessous de T

pour $x < 0$, $h(x) > 0$ et donc C est au dessus de T