DS 7

I ① $a_1 = \dfrac{7+i}{3-2i} = \dfrac{(7+i)(3+2i)}{13}$

$= \dfrac{19}{13} + \dfrac{17i}{13}$

$a_2 = \dfrac{-3}{(1+i)(2-i)} = \dfrac{-3}{3+i}$

$= \dfrac{-3(3-i)}{10} = -\dfrac{9}{10} + \dfrac{i}{10}.$

$a_3 = 3e^{7i\pi/2} + 2e^{2i\pi}$

$= -3i + 2$

② $b_1 = \dfrac{2+i}{1-2i} \Rightarrow \overline{b_1} = \overline{\dfrac{2+i}{1-2i}} = \dfrac{2-i}{1+2i}$

$= \dfrac{(2-i)(1-2i)}{5} = \dfrac{-5i}{5} = -i$

Autre méthode (en factorisant par i au numérateur)

$b_1 = \dfrac{i(-2i+1)}{1-2i} = +i \Rightarrow \overline{b_1} = -i$

$b_2 = ie^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow \overline{b_2} = \overline{ie^{i\pi/4}}$

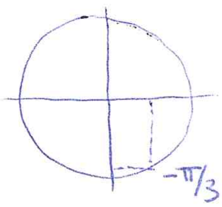
$= -ie^{-i\pi/4}$

③ $c_1 = -3 + i\sqrt{3}$

$|c_1|^2 = 9 + 3 = 12 \Rightarrow |c_1| = 2\sqrt{3}$

d'où $c_1 = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$



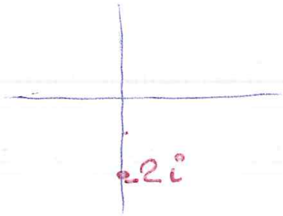
$= 2\sqrt{3}\left(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\right)$

$= 2\sqrt{3}\, e^{-i\pi/3}$

$c_2 = -3\, e^{i\pi/3}$

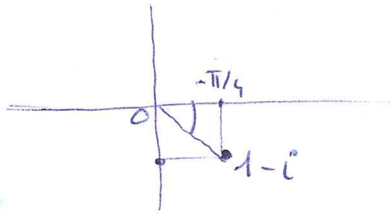
$= 3\, e^{i\pi} e^{i\pi/3} = 3\, e^{4i\pi/3}$

$c_3 = -2i = 2\, e^{-i\pi/2}$



$c_4 = 4-4i$

$= 4(1-i)$



$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

d'où $c_4 = 4\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

II ① $i\bar{z} + 2 = i \iff \bar{z} = \frac{i-2}{i}$

$= \frac{(i-2)i}{-1} = -(i^2 - 2i) = +1+2i$

d'où $z = 1-2i$

② $iz + \bar{z} = 2$

Soit $z = x+iy$; $x,y \in \mathbb{R}$

$(E_2) \iff i(x+iy) + \overline{(x+iy)} = 2$

$\iff ix - y + x - iy = 2 \iff x-y + i(x-y) = 2$

$\iff \begin{cases} x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ (par identification des partie réelles et imaginaire)

d'où $S = \emptyset$

③ $5z^2 + z + 15 = 0$

$\Delta = 1+300 = 301$ donc on a 2 racines complexes $z_1 = \frac{-1+\sqrt{301}}{10}$

$z_2 = \frac{-1-\sqrt{301}}{10}$.

III ① $M(z) \in \mathcal{E}_1 \iff \arg(z+3i) = \frac{\pi}{6}\ (\pi)$

$\iff (\vec{u}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{6}\ (\pi)$ avec $A(-3i)$

d'où $\mathcal{E}_1$ est une droite passant par A privée de A.

② Soit $B(-4-i)$; $C(i)$

$M(z) \in \mathcal{E}_2 \iff |z+4+i| = |z-i|$

$\iff MB = MC$

d'où $\mathcal{E}_2$ médiatrice de $[BC]$

③ Soit $D(4i)$; $M(z) \in \mathcal{E}_3 \iff |z-4i| = 2$

$\iff DM = 2$

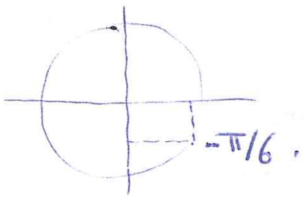
donc $\mathcal{E}_3 = \mathcal{C}(D,2)$.

IV ① $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

$|z_1|^2 = 6+2 = 8 \implies |z_1| = 2\sqrt{2}$

$\implies z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$

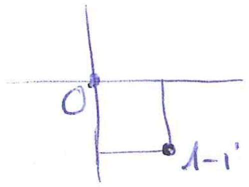
$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$



$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}$

② $z_2 = 2-2i$

$= 2(1-i)$



$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

d'où $z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

③ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i} = \frac{1}{8}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2i)$

$= \frac{1}{8}\left(2\sqrt{6}+2\sqrt{2} + i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)$

④ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = e^{i(\pi/4-\pi/6)} = e^{i\pi/12}$

On a donc $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\pi/12} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

et $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)$

donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

V ① $M(5+3i)$; $N(1+7i)$; $P(-3+3i)$ et $Q(1-i)$

$z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M$; $z_{\overrightarrow{QP}} = -4+4i$

$= -4+4i$

d'où $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Longrightarrow$ MNPQ parallélogramme.

②

$a = \frac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = \frac{1-i-(5+3i)}{1+7i-(5+3i)}$

$= \frac{-4-4i}{-4+4i} = \frac{i(4i-4)}{4i-4} = i$

③ On a alors $\left|\frac{z_Q-z_M}{z_N-z_M}\right| = 1 \iff \frac{MQ}{MN} = 1 \iff MQ = MN$

et par th $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \arg\left(\frac{z_Q-z_M}{z_N-z_M}\right) \quad (2\pi)$

$= \arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

d'où MNPQ est un parallélogramme avec 2 côtés consécutifs égaux et un angle droit d'où MNPQ est un carré

VI $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \text{ tq } \frac{z+3i}{z-3-2i} \text{ imaginaire pur} \right\}$

$M(z) \in \mathcal{E} \iff \frac{z-z_A}{z-z_B}$ est imaginaire pur

$\iff \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{z-z_A}{z-z_B} = 0$

$\iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $M = A$

Donc $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre [AB] privé de B