DS 8 - 1,5 h

I 1 a) r rotat° de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

donc r a pour écriture complexe $z' - z_O = e^{2i\pi/3}(z - z_O)$

c'est-à-dire $z' = e^{2i\pi/3} z$.

b) $r(B) = C$

$\Leftrightarrow \quad z_C = e^{2i\pi/3} z_B$

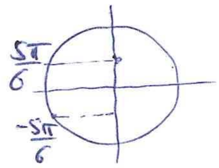
$= e^{2i\pi/3} \times e^{-i5\pi/6}$

$= e^{-i\pi/6}$

c) $z_B = e^{-5i\pi/6}$

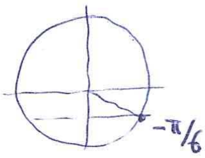
$= \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.



$z_C = e^{-i\pi/6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$



d) Voir figure.

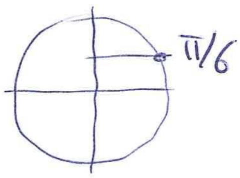
II a) D barycentre de $(A, 2)$; $(B, -1)$ et $(C, 2)$

d'où par th $z_D = \dfrac{2z_A - z_B + 2z_C}{3}$

$= \frac{1}{3}\left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + \sqrt{3} - i\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{3i}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$= e^{i\pi/6}$



(b) on remarque que $|z_A| = |i| = 1$; $|z_B| = |e^{-5i\pi/6}| = 1$

$|z_C| = |e^{-i\pi/6}| = 1$ et $|z_D| = |e^{i\pi/6}| = 1$

d'où A, B, C, D sont des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et rayon 1

(3) (a) h homothétie de centre A(i) et de rapport 2

h a pour écriture complexe $z' - z_A = 2(z - z_A)$

d'où $z' - i = 2(z - i)$

$\Rightarrow$ $z' = 2z - i$

(b) $E = h(D)$

$\Leftrightarrow$ $z_E = 2z_D - i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - i$

$= \sqrt{3}$

(4a) $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}$

$= \dfrac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = \dfrac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi/6}}$ car $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\pi/6}$

$= e^{i\pi/3}$

(b) On a alors $z_D - z_C = e^{i\pi/3}(z_E - z_C)$

donc dans la rotation de centre C, d'angle $\frac{\pi}{3}$ le point E a pour image D.

En particulier $CE = CD$ et $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3}$ (2π)

d'où le triangle CED est équilatéral direct

II ① f_0 solution de (E) : $y' = 2y + \cos x$

$\iff (a\cos x + b\sin x)' = 2(a\cos x + b\sin x) + \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff (-a\sin x + b\cos x) = 2a\cos x + 2b\sin x + \cos x$

$\iff \cos x(2a - b + 1) + \sin x(2b + a) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ 2b + a = 0 \end{cases}$ (par identification)

$\iff \begin{cases} 2a - b = -1 \\ +a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -1 \\ -5b = -1 \quad L_1 - 2L_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b = \frac{1}{5} \\ a = (-1 + \frac{1}{5}) \times \frac{1}{2} = -\frac{2}{5} \end{cases}$

D'où $f_0(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$ est solution particulière de (E)

② On reconnait une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 2$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f de la forme

$f(x) = Ke^{2x}$ avec K constante ; $x \in \mathbb{R}$.

③ $f - f_0$ solution de $(E_0) \iff (f - f_0)' = 2(f - f_0)$

$\iff f' - 2f = f_0' - 2f_0$

$\iff f'(x) - 2f(x) = \underbrace{f_0'(x) - 2f_0(x)}_{= \cos x \text{ car } f_0 \text{ sol de (E)}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff f'(x) - 2f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff f$ solution de (E).

④ y solution de (E) $\iff$ $f - f_0$ solution de (E_0)

$\overset{②}{\iff}$ il existe K constante telle que

$$f(x) - f_0(x) = K e^{2x}$$

$$\iff f(x) = K e^{2x} + f_0(x)$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme

$f(x) = K e^{2x} - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$ avec K constante ; $\forall x \in \mathbb{R}$.

⑤ On cherche f telle que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$f(\frac{\pi}{2}) = 0 \iff 0 = K e^{2\pi/2} - \frac{2}{5} \cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5} \sin(\frac{\pi}{2})$

$\iff 0 = K e^{\pi} + \frac{1}{5}$

$\iff K = -\frac{1}{5e^{\pi}}$

D'où la fonction h solution de (E) telle que $h(\frac{\pi}{2}) = 0$ est

$$h(x) = -\frac{1}{5} e^{2x - \pi} - \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

III ① Soit P_n la propriété $U_n \geq 0$

montrons par récurrence que $\forall n \geq 3$, P_n vraie.

Etape 1 : $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 0 - 1$; $u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \ - 1$

$= -\frac{1}{2}$; $u_2 = -\frac{1}{4}$

et $u_3 = \frac{1}{2} u_2 + 1$

$= -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8} \geq 0$ donc P_3 est vraie

Etape 2 : Soit $q \geq 3$ supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow u_q \geq 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u_q \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} u_q + q - 1 \geq q - 1$$
$$\geq 2 \quad \text{car } q \geq 3$$

d'où $u_{q+1} \geq 2 > 0 \Rightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$.

② $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1$

d'où $\forall n \geq 3$; $\frac{1}{2} u_n \geq 0$ (d'après ①)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u_n + n - 1 \geq n - 1$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \geq n - 1 \quad \forall n \geq 3$$

et donc $\forall n \geq 4 \quad u_n \geq n - 2$.

③ $\lim_{n \to +\infty} (n-2) = +\infty$ donc d'après le th de comparaison $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$