DS 10 (2h)

13 mars 2012.

I

$$I = \int_0^1 5^x \, dx$$

$$= \int_0^1 e^{x\ln 5} dx = \frac{1}{\ln 5} \int_0^1 \underbrace{\ln 5 \, e^{x \ln 5}}_{u'e^u} dx = \frac{1}{\ln 5} \left[e^{x\ln 5} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 5} \left(e^{\ln 5} - 1 \right)$$

$$= \frac{4}{\ln 5}$$

$$J = \int_2^3 \frac{3x}{1-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int_2^3 \underbrace{\frac{-2x}{1-x^2}}_{= \frac{u'}{u}} dx$$

$$= -\frac{3}{2} \left[\ln|1-x^2| \right]_2^3 = -\frac{3}{2} \left(\ln 8 - \ln 3 \right)$$

$$= -\frac{3}{2} \ln \frac{8}{3} = -\frac{9}{2} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

II

① $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{7}{2}$

$v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{7/2 + 4}{2} = \dfrac{15}{4}$

$u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{7/2 + 15/4}{2} = \dfrac{29}{8}$

$v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{29/8 + 15/4}{2} = \dfrac{59}{16}$

② ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + v_n}{2} - u_n \right)$$

$$= \frac{1}{4} (v_n - u_n) = \frac{1}{4} w_n .$$

En conclusion (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

(b) La forme explicite de (w_n) est alors

$w_n = w_0 \times q^n$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$ et $\left|\frac{1}{4}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

$$= \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2}$$

or $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}\quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n$

$$= \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{\frac{v_n + u_n}{2} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{w_n}{4}$$

et $w_n > 0$ d'où $v_{n+1} - v_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc (v_n) décroissante.

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

En conséquence (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

par th, on déduit alors que (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}\ t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3}$

$$= \frac{\frac{1}{2}(u_n + v_n) + 2 \times \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n)}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left(u_n + v_n + 2u_{n+1} + 2v_n\right) = \frac{1}{6}\left(u_n + 3v_n + u_n + v_n\right)$$

$$= \frac{1}{6}(2u_n + 4v_n) = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n$ et donc (t_n) est constante. $= t_n$.

(b) (t_n) constante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}$

Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

alors $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{11}{3}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + 2v_n = 11$

et en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$ on a $3l = 11$

d'où $\quad l = \frac{11}{3}$

les suites (u_n) et (v_n) ont pour limite $l = \frac{11}{3}$.

III ① $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t \, dt$

Soient u, v, u', v' fonctions dérivables et continues telles que

$u(t) = 1-t \qquad u'(t) = -1$

$v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$

alors par intégration par parties $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt = \left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt$

$= -1 + \left[e^t\right]_0^1 = -1 + e - 1$

$= e - 2$

donc $u_1 = e-2$

② $\forall t \in [0,1]$ on a $t \leq 1$ donc $1-t \geq 0$

d'où $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)^n e^t \geq 0$

et comme les bornes sont dans l'ordre $(0 \leq 1)$, on a d'après le th de positivité

$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0$ c'est à dire $u_n \geq 0$.

③ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt$

Soient u, v, u', v' fonctions dérivables et continues telles que

$u(t) = (1-t)^{n+1} \qquad u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$

$v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$

alors par intégration par parties.

$$u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt$$

$$= \left[(1-t)^{n+1} e^t \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

$$= -1 + (n+1) u_n$$

on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = (n+1) u_n - 1$

4 a) $\forall t \in [0,1]$ on a $t \leq 1$

$\Rightarrow e^t \leq e$ car exp st. ↗ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$ car $(1-t)^n \geq 0$ sur $[0,1]$

b) Les bornes sont dans l'ordre $(0 \leq 1)$

donc par intégration de l'inégalité on a

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e \, dt$$

$\Leftrightarrow \quad u_n \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt$ et $\int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$$= \frac{1}{n+1}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq \frac{e}{n+1}$

5) Avec 2) on déduit alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ d'où par th des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

IV 1 a
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{par produit}} \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$$

b $f(x) = x^2 \ln x \; ; \; x>0$

f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivation donc

$\forall x>0 \quad f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$

$= 2x\ln x + x \quad = x(2\ln x + 1)$

sur $\mathbb{R}_+^*$ $x>0$ d'où $f'(x)$ est du signe de $2\ln x + 1$

d'où $f'(x) > 0 \iff 2\ln x + 1 > 0$

$\iff \ln x > -\frac{1}{2} \iff x > e^{-1/2}$ car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

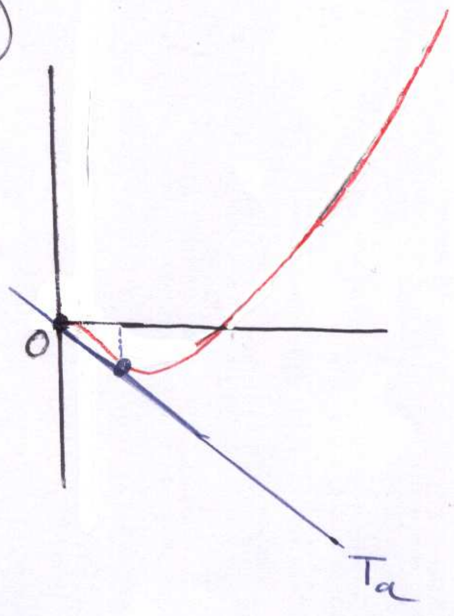
$\iff x > \frac{1}{\sqrt{e}}$

d'où le tableau de variations de f

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow +\infty$

et $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

2



Soit $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

la tangente au point d'abscisse a.

on a $T_a : y = a(2\ln a + 1)(x-a) + a^2\ln a$

$\iff y = a(2\ln a + 1)x - 2a^2\ln a - a^2 + a^2\ln a$

$\iff y = a(2\ln a + 1)x - a^2\ln a - a^2$

On a alors $O(0,0) \in T_a \iff -a^2\ln a - a^2 = 0$

$$\iff a^2(1+\ln a) = 0$$

$$\iff a = 0 \quad \text{ou} \quad \ln a = -1$$

$a=0$ impossible car $D_f = \mathbb{R}_+^*$

d'où $\ln a = -1 \iff a = \frac{1}{e}$

Finalement il existe une unique tangente passant par O ; c'est la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

③ ⓐ $\forall x > 0 \quad \left(\frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\right)' = \frac{5x^4}{25}(5\ln x - 1) + \frac{x^5}{25} \times \frac{5}{x}$

$$= \frac{x^4}{5}(5\ln x - 1) + \frac{x^4}{5}$$

$$= \frac{x^4}{5}(5\ln x - 1 + 1) = x^4 \ln x$$

d'où $x \longmapsto \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$ est bien une primitive de $x \longmapsto x^4 \ln x$.

ⓑ On a donc

$$V = \int_{1/e}^{1} \pi (f(x))^2 dx = \int_{1/e}^{1} \pi x^4 (\ln x)^2 dx$$

Soient u, u', v, v' fonctions dérivables et continues telles que

$u(x) = (\ln x)^2$; $u'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$.

$v'(x) = x^4$; $v(x) = \frac{x^5}{5}$

alors par intégration par parties $V = \pi \int_{1/e}^{1} x^4 (\ln x)^2 dx$.

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5}(\ln x)^2\right]_{1/e}^{1} - \pi \int_{1/e}^{1} \frac{2}{5} x^4 \ln x \, dx$$

$$V = \pi\left(-\frac{1}{5e^5}\right) - \frac{2\pi}{5}\left[\frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\right]_{1/e}^{1}$$

$$= -\frac{\pi}{5e^5} - \frac{2\pi}{5}\left(-\frac{1}{25} - \frac{1}{25e^5}(-6)\right)$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{125}\left(-\frac{25}{e^5} + 2 - \frac{12}{e^5}\right) = \frac{\pi}{125}\left(2 - \frac{37}{e^5}\right)}$$