DS (4h)

Avril 2012

I A Th d'intégrat° par parties : $I=[a;b]$

Soient u, v continues et dérivables sur I avec u', v' continues sur I alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Démonstrat° : $(u(t)v(t))' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ d'après les règles de dérivabilité.

d'où $\forall t \in [a,b]$, $u(t)v'(t) = (u(t)v(t))' - u'(t)v(t)$

et donc $$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b (u(t)v(t))'dt - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

$$= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

La formule est donc démontrée.

B 1 a et b.

La posit° relative de C_1 et C_2 est donnée par le signe de la différence $h(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x-1)^2 e^{-x} - \frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$= (x-1)^2 \left(e^{-x} - \frac{3}{2}\right)$$

étude du signe de $e^{-x} - 3/2$:

$e^{-x} - \frac{3}{2} \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant \frac{3}{2}$

$\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff x \leqslant -\ln(3/2)$

On déduit alors le tableau de signe de h :

x		$-\ln(3/2)$		1	
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$e^{-x}-\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$		$-$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

On déduit du tableau que C_1 est au-dessus de C_2 pour $x \in]-\infty ; -\ln(\frac{3}{2})]$
et C_1 en dessous de C_2 pour $x \in]-\ln(3/2) ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
C_1 et C_2 se coupent pour $x \in \{-\ln(3/2) ; 1\}$
Les points d'intersect° de C_1 et C_2 sont donc
$A_1(-\ln(3/2) ; g(-\ln(3/2)))$ et $A_2(1 ; g(1))$

c'est-à-dire $A_1(-\ln(3/2) ; \frac{3}{2}(\ln 3/2 + 1)^2)$ et $A_2(1;0)$

② ⓐ Soit $I = \int_0^1 (x-1)^2 e^{-x} dx$

Soit u, v, u', v' continues et dérivables avec
$u(x) = (x-1)^2 \qquad u'(x) = 2(x-1)$
$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

alors $I = [-(x-1)^2 e^{-x}]_0^1 + 2\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$
$= 1 + 2\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx.$

Soit $J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$

Soient u, v, u', v' continues et dérivables telles que
$u(x) = (x-1) \quad ; \quad u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x} \quad ; \quad v(x) = -e^{-x}$

donc par intégration par parties

$$J = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= -1 + \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -1 + 1 - e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

d'où $I = 1 + 2J$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

b) Sur $[0;1]$ C_2 est au dessus de C_1 donc l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

et $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \underbrace{(x-1)^2}_{u'u^2}dx$

$$= \frac{3}{2}\left[(x-1)^3 \times \frac{1}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

donc l'aire cherchée est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{e} = \frac{4-e}{2e} \text{ u.a}$$

C 1 a

pour $x \in [0;1]$ on a $\quad 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow \quad -1 \leq -x \leq 0 \quad (\times(-1))$

$\Rightarrow \quad e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ car exp ↗ sur $\mathbb{R}$

d'où $\forall x \in [0,1]$, $\quad 0 \leq e^{-x} \leq 1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq (x-1)^{2n} e^{-x} \leq (x-1)^{2n} \quad (\times (x-1)^{2n}$ avec $(x-1)^{2n} \geq 0)$

b On a alors par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 (x-1)^{2n} dx$$

et $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{(x-1)^{2n}}_{u'u^{2n}} dx = \left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$

$$= -\frac{(-1)\times(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$

2 On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

Donc d'après le th des Gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

II 1 a $A(-1;2,1)$ $B(1,-6,-1)$ $C(2,2,2)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

on a $y_{\vec{AC}} = 0y_{\vec{AB}}$ et $z_{\vec{AC}} = -\frac{1}{2}z_{\vec{AB}}$ donc $\vec{AB},\vec{AC}$ non colinéaires

d'où A, B, C non alignés $\Longrightarrow$ A,B et C definissent un plan.

b $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ donc $\vec{m}.\vec{AB} = 2-8+6=0$ et $\vec{m}.\vec{AC} = 3-3=0$

d'où $\vec{m}\perp\vec{AB}$ et $\vec{m}\perp\vec{AC}$ $\Longrightarrow$ $\vec{m}$ vecteur normal à (ABC)

c $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ normal à (ABC) donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme $x+y-3z+d=0$

et $A(-1;2,1)\in(ABC)$ $\Longrightarrow$ $-1+2-3+d=0$

$\Longrightarrow$ $d=2$

d'où $(ABC): x+y-3z+2=0.$

2 a $P: x-y+z-4=0$

donc P a pour vecteur normal $\vec{n_P}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

on a $x_{\vec{n_P}} = x_{\vec{n}}$ et $y_{\vec{n_P}} = -y_{\vec{m}}$

donc $\vec{n_P}$ et $\vec{m}$ non colinéaires $\Longrightarrow$ P et (ABC) non parallèles

$\Longrightarrow$ P et (ABC) sécants.

b $M(x,y,z)\in P\cap(ABC)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{paramétrisat°}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} x+y = 3t-2 \\ x-y = 4-t \\ z = t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = 2t+2 & (L_1+L_2) \\ 2y = 4t-6 & (L_1-L_2) \\ z = t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

La droite D admet pour système d'équation : $\boxed{\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$

3 a $I(2,-1,1)$

prenons $t=1$ dans les équations de D : on a alors $x=2\,;\, y=-1\,;\, z=1$

et c'est donc que $I \in D$.

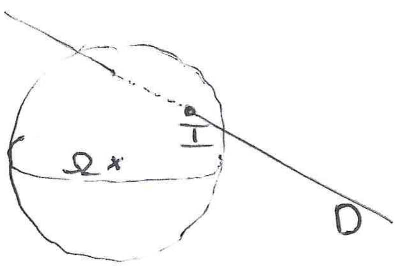
b $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ d'où $\Omega I^2 = 1+4+4 = 9$

$\Longrightarrow \Omega I = 3$

et comme S est la sphère de centre Ω et de rayon 3

on déduit $I \in S$

c Methode 1 : $D \cap S$ est réduit à un point



$\Longleftrightarrow$

D et S sont tangents

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{u_D} \perp \overrightarrow{\Omega I}$ ou $\overrightarrow{u_D}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

/

or $\vec{u_D} \cdot \vec{\Omega I} = -1 - 4 - 2 = -7 \neq 0$

donc $\vec{u_D}$ et $\vec{\Omega I}$ non orthogonaux $\Rightarrow$ D et S non tangents

et donc D et S se coupent en 2 points.

Méthode 2 $M(x,y,z) \in D \cap S$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = t \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \; ; \; y = -3+2t \; ; \; z = t \\ (t-2)^2 + (2t-4)^2 + (t-3)^2 = 9 \quad (*) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2 - 6t + 9 = 9$

$\Leftrightarrow 6t^2 - 26t + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 13t + 10 = 0$

$\Delta = 13^2 - 120 = 49$ d'où $t = \frac{13+7}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

ou $t = \frac{13-7}{6} = 1$

d'où $M(x,y,z) \in D \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \; ; \; y = -3+2t \; ; \; z = t \\ t = 1 \text{ ou } t = 10/3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $x = 2 \; ; \; y = -1 \; ; \; z = 1$

ou

$x = \frac{13}{3} \; ; \; y = \frac{11}{3} \; ; \; z = \frac{10}{3}$

Donc $D \cap S$ a deux points d'intersection : $I(2, -1, 1)$ et $J\left(\frac{13}{3} ; \frac{11}{3} ; \frac{10}{3}\right)$

III Non spécialiste

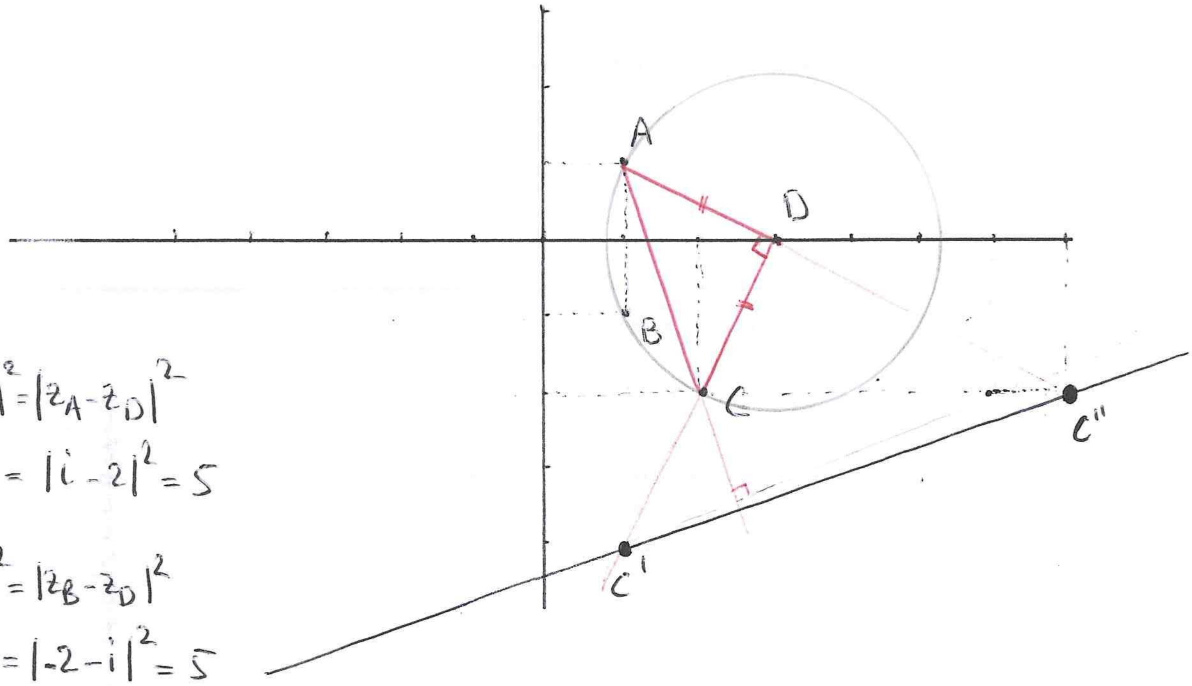
① $z^2-2z+2=0$

$\Delta = 4-8=-4<0$

donc l'équation admet deux solutions complexes:

$z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$ et $z_2=\frac{2-2i}{2}=1-i$

②



③ $DA^2=|z_A-z_D|^2$

$=|i-2|^2=5$

$DB^2=|z_B-z_D|^2$

$=|-2-i|^2=5$

$DC^2=|z_C-z_D|^2=|2-2i-3|^2=|-1-2i|^2=5$

d'où $DA=DB=DC=\sqrt{5}$

donc A, B, C sont sur le même cercle de centre D et rayon $\sqrt{5}$.

④ $\frac{z_C-3}{z_A-3}=\frac{2z_B-3}{1+i-3}=\frac{2(1-i)-3}{i-2}=\frac{-1-2i}{i-2}=i\frac{(i-2)}{i-2}=i$

d'où $z_C-z_D=e^{i\pi/2}(z_A-z_D)$

donc dans la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ le point A a pour image C

donc DAC est rectangle isocèle en D.

⑤ $h = h_{(D;2)}$; $r = R_{(D,\pi/2)}$

h a pour écriture complexe $z' - z_D = 2(z - z_D)$

d'où $z' = 2z - 6 + 3 \Rightarrow z' = 2z - 3$.

r a pour écriture complexe $z' - z_D = e^{i\pi/2}(z - z_D)$

$\Rightarrow z' = iz - 3i + 3$.

$C \xmapsto{h} C' \Rightarrow z_{C'} = 2z_C - 3$

$= 2(2(1-i)) - 3 = 4 - 4i - 3 = 1 - 4i$

$\Rightarrow C'(1-4i)$

$C' \xmapsto{r} C'' \Rightarrow z_{C''} = iz_{C'} - 3i + 3$

$= i(1-4i) - 3i + 3$

$= i + 4 - 3i + 3$

$= 7 - 2i$ $\Rightarrow C''(7-2i)$

On a alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C'C''}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C'C''} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow (AC) \perp (C'C'')$

IV A 1 $f(x) = x + \ln x \; ; \quad x \in \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable d'après les règles de dérivabilité et $\forall x>0 \; ; \; f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

d'où sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)>0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

par somme, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{0} f = -\infty$

On déduit alors le tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2
- f dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\lim\limits_{0} f = -\infty \; ; \; \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$
- $0 \in]-\infty, +\infty[$

donc d'après le th de la bijection, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ unique tel que $f(\alpha) = 0$.

3) De plus $f(\frac{1}{2}) < 0 \; ; \; f(1) > 0$ d'où $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

B $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5} \; ; \quad x \in \mathbb{R}_+^*$

1 a g dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{5}\left(4 - \frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0$.

$$g'(x) > 0 \iff 4 - \frac{1}{x} > 0$$
$$\iff \frac{1}{x} < 4 \iff x > \frac{1}{4}.$$

d'où le tableau de variation de g :

x	0		$1/4$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(\frac{1}{4})$	$\nearrow$	

avec $g(\frac{1}{4}) = \frac{4+2\ln 2}{5}$

b) On déduit que sur $[\frac{1}{2}, 1]$ g est croissante

donc $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow g(\frac{1}{2}) \leq g(x) \leq g(1)$

$$\iff \frac{2+\ln 2}{5} \leq g(x) \leq \frac{4}{5}$$

et $\frac{2+\ln 2}{5} \simeq \frac{2{,}69}{5} \geq \frac{1}{2} \; ; \; \frac{4}{5} \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$

On a donc bien $x \in [\frac{1}{2} ; 1] \Rightarrow g(x) \in [\frac{1}{2} ; 1]$.

c) $g(x) = x \iff \dfrac{4x - \ln x}{5} = x$

$\iff 4x - \ln x = 5x \iff \ln(x) = -x$

$\iff x$ solut° de (E).

Ainsi: $g(x) = x \iff x$ solut° de (E).

2) a) Montrons par récurrence que la propriété P_n: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 1: $u_0 = \frac{1}{2}$; $u_1 = g(u_0) = \dfrac{2+\ln 2}{5} \simeq \dfrac{2{,}69}{5}$

donc on a bien $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1 \implies P_0$ est vraie

Etape 2: Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\implies \frac{1}{2} \leq u_q \leq u_{q+1} \leq 1$

$\implies g(\frac{1}{2}) \leq g(u_q) \leq g(u_{q+1}) \leq g(1)$ car $g \nearrow$ sur $[\frac{1}{2}; 1]$

$\implies \underbrace{\dfrac{2+\ln 2}{5}}_{\simeq \frac{2,69}{5}} \leq u_{q+1} \leq u_{q+2} \leq \dfrac{4}{5}$

$\implies \frac{1}{2} \leq u_{q+1} \leq u_{q+2} \leq 1$ d'où P_{q+1} vraie.

Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

b) On déduit donc que (u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) converge vers un réel $\ell \in [\frac{1}{2}; 1]$

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = g(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [\frac{1}{2}; 1] \\ g \text{ continue sur } [\frac{1}{2}; 1] \end{array}\right\} \implies g(\ell) = \ell \text{ d'après le th du pt fixe}$$

et d'après B1.c $g(\ell) = \ell \iff \ell$ solut° de (E)

$\iff \ell = \alpha$ d'après A3

③ ⓐ Avec le mode recurrence de la calculatrice

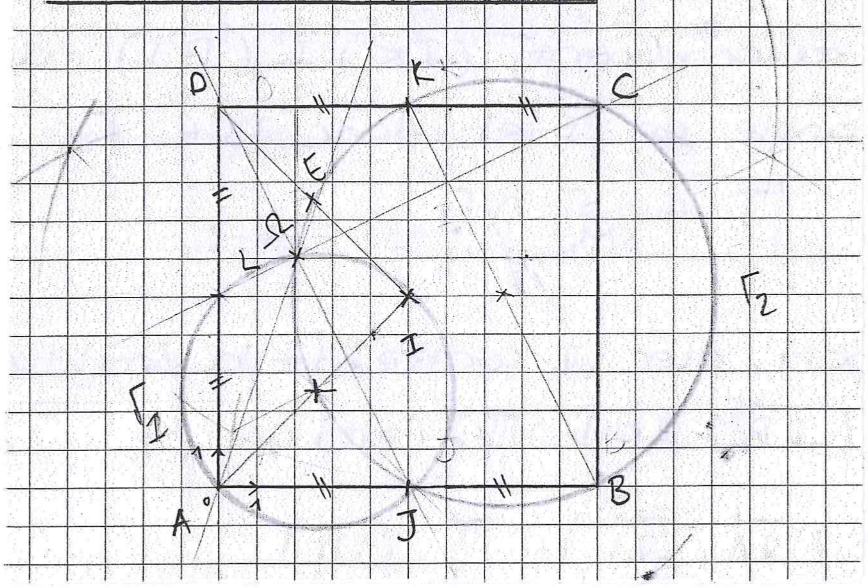
on a $u_{10} \simeq 0{,}567124$

ⓑ On a $u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5.10^{-4}$

$\Rightarrow 0{,}567124 \leq \alpha \leq 0{,}567624 \Rightarrow 0{,}567 \leq \alpha \leq 0{,}568$

III

Exercice 3 (Spécialité)



$A \longmapsto I$

$B \overset{s}{\longmapsto} K$

$\Omega \overset{s}{\longmapsto} \Omega$

$C \overset{s}{\longmapsto} D$

A ① s similitude directe telle que $A \longmapsto I$; $B \longmapsto K$

donc par th. s a pour rapport $k = \frac{IK}{AB} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$

et pour angle $\Theta = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{IK}) \quad (2\pi)$

$= +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

②

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{s}{\longmapsto} I \\ \Omega \overset{s}{\longmapsto} \Omega \\ s \text{ a pour angle } +\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\overrightarrow{\Omega A} ; \overrightarrow{\Omega I}) = +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$\Longrightarrow$ Ω point du cercle de diamètre $[AI]$

$\Longrightarrow$ $\Omega \in \Gamma_1$

de même : $\left.\begin{array}{l} B \overset{s}{\longmapsto} K \\ \Omega \overset{s}{\longmapsto} \Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega K}) = +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

$\Longrightarrow$ $\Omega \in \Gamma_2$

donc $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$; J étant le second point d'intersect° de Γ_1 et Γ_2

③ $\left.\begin{array}{l} A \overset{s}{\longmapsto} I \\ s \text{ a pour angle } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ l'image de (AC) est une droite perpendiculaire à (AC) passant par I

d'où (AC) a pour image (BD).

de même $B \mapsto K$ donc l'image de (BC) est une droite perpendiculaire à (BC) passant par K d'où $(BC) \xrightarrow{s} (DC)$

$$\left.\begin{array}{l} \{C\} = (AC)\cap(BC) \\ (AC) \longrightarrow (BD) \\ (BC) \longrightarrow (DC) \end{array}\right\} \Longrightarrow s(C) \in (BD)\cap(DC) = \{D\}$$

d'où $C \xmapsto{s} D$

(b) $$\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu de } [AC] \\ A \xmapsto{s} I \\ C \xmapsto{s} D \end{array}\right\} \Longrightarrow s(I) \text{ milieu de } [ID]$$

c'est-à-dire $E = s(I)$.

(4) soit $t = s\circ s$

alors t est une similitude directe de centre Ω, d'angle π et de rapport $\frac{1}{4}$. On déduit donc que t est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$.

et $t(A) = s(s(A))$
$= s(I) = E$

et dans une homothétie ; un point ; son image et le centre sont alignés donc A, E, Ω alignés.

(B) (1) Dans $\left(A, \frac{\vec{AB}}{10}; \frac{\vec{AD}}{10}\right)$ on a $z_A = 0$; $z_B = 10$; $z_C = 10(1+i)$
$z_D = 10i$

(2) On sait que s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc elle admet une écriture complexe de la forme

$z' = \frac{i}{2}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$

de plus $A(0) \xmapsto{s} I(5(1+i))$

d'où $5(1+i) = b$ et donc s a pour écriture complexe

$z' = \frac{i}{2}z + 5(1+i)$.

③ $\Omega(\omega)$ est invariant par s d'où

$\omega = \frac{i}{2}\omega + 5(1+i)$

$\Longleftrightarrow \omega(2-i) = 10(1+i) \Longleftrightarrow \omega = \dfrac{10(1+i)}{2-i}$

$= \dfrac{10(1+i)(2+i)}{5} = 2(1+3i)$

d'où $\Omega(2+6i)$.

④ $I \xmapsto{s} E$ d'où $z_E = \frac{i}{2} z_I + 5(1+i)$

$= \frac{i}{2}((1+i)5) + 5(1+i)$

$= 5(1+i)\left(1+\frac{i}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}(1+i)(2+i) = \frac{5}{2}(1+3i)$

d'où $E\left(\frac{5}{2}(1+3i)\right)$

$z_{\overrightarrow{A\Omega}} = 2+6i \; ; \; z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{5}{2}(1+3i)$

d'où $z_{\overrightarrow{A\Omega}} = \frac{4}{5} z_{\overrightarrow{AE}} \Rightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \Omega, A, E$ alignés.

⑤ • L a pour affixe $5i$; $\Omega(2+6i)$ et $C(10+10i)$

d'où $\overrightarrow{\Omega L}(-2-i)$; $\overrightarrow{\Omega C}(8+4i)$

d'où $\overrightarrow{\Omega C} = -4\overrightarrow{\Omega L} \Rightarrow \Omega, C, L$ alignés.

• $J(5)$; $D(10i)$; $\Omega(2+6i)$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega J}(3+6i)$; $\overrightarrow{\Omega D}(-2+4i)$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega J} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega D} \Rightarrow \Omega, D, J$ alignés.

d'où Ω est bien le point d'intersect° de (CL), (DJ), (AE).