DS 4

8 nov 2011

I ① $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ par th.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

donc par produit $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

② $f(x) = \ln(\ln(x))$

$X = \ln x$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$

$\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$

$\xRightarrow{\text{Composée}}$ $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$.

II $(\ln x)^2 - 7\ln(x) + 12 \leq 0$ (E)

$\iff \begin{cases} X^2 - 7X + 12 \leq 0 & (*) \\ X = \ln x \end{cases}$

Résolut° de $(*)$: $\Delta = 1$ donc $X^2 - 7X + 12$ admet 2 racines : X= X=

d'où le tableau de signes :

X		3		4	
$X^2-7X+12$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc X solut° de $(*)$ $\iff 3 \leq X \leq 4$.

d'où (E) $\iff \begin{cases} 3 \leq X \leq 4 \\ X = \ln x \end{cases}$

$\iff 3 \leq \ln x \leq 4 \iff e^3 \leq x \leq e^4$

car exp strict ↑ sur $\mathbb{R}$.

D'où $S = [e^3 ; e^4]$

III f dérivable d'après les règles de dérivation et

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \quad \forall x > 1$$

IV $$f(x) = \frac{7}{1-3x} = -\frac{7}{3} \underbrace{\frac{-3}{1-3x}}_{\frac{u'}{u}} \quad \text{sur } \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$$

donc f admet pour primitive $F(x) = -\frac{7}{3} \ln|1-3x| + K$

et sur $\left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$, $(1-3x) < 0$ donc $|1-3x| = 3x - 1$

d'où $F(x) = -\frac{7}{3} \ln(3x-1) + K.$