DS 5 (2h)

I **(E_1)** $\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(x+9)$.

Domaine de résolut° : $x+4 \geqslant 0$; $x+1 \geqslant 0$; $x+9 \geqslant 0$

d'où $D =]-1 ; +\infty[$.

$(E_1) \Leftrightarrow \ln((x+4)(x+1)) = \ln(x+9)$

$\Leftrightarrow (x+4)(x+1) = x+9$ car $\exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+^*}$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 36$; $x = \frac{-4+6}{2} = 1 \in D$ ou $x = -5 \notin D \Longrightarrow S = \{1\}$

(E_2) $(\ln x)^2 + \ln x - 12 > 0$; $D = \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X^2 + X - 12 > 0 \quad (*) \end{cases}$.

Résolution de $(*)$: $\Delta = 49$; les racines sont $X_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$

$X_2 = \frac{-1-7}{2} = -4$.

d'où le tableau de signe :

X		-4		3	
X^2+X-12	$+$	0	$-$	0	$+$

d'où les solut° de $(*)$: $X \in]-\infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$.

d'où $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x. \\ X < -4 \text{ ou } X > 3. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ln x < -4$ ou $\ln x > 3$

$\Leftrightarrow x < e^{-4}$ ou $x > e^3$ car exp s. ↑ sur $\mathbb{R}$.

d'où $S =]-\infty ; e^{-4}[\cup]e^3 ; +\infty[$

(E_3) $e^x = -4$; $S = \emptyset$ car $\forall x$ $e^x > 0$.

(E_4) $(e^x - 3)^2 = 9$ $\Leftrightarrow e^x - 3 = 3$ ou $e^x - 3 = -3$

$\Leftrightarrow e^x = 6$ ou $e^x = 0$ (impossible)

$\Leftrightarrow x = \ln 6$

d'où $S = \{\ln 6\}$

(E5) $\iff e^{(x^2)} \leq \frac{1}{e}$

$\iff e^{x^2} \leq e^{-1}$

$\iff x^2 \leq -1$ car ln s.↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $S = \emptyset$

(E6) $e^{(x^2)} \leq (e^x)^2$

$\iff e^{(x^2)} \leq e^{2x} \iff x^2 \leq 2x$ car ln s.↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff x(x-2) \leq 0$

x		0		2	
$x(x-2)$	+	0	−	0	+

$S = [0;2]$

(E7) $x(2e^x - 1) \geq 0$.

$2e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq -\ln 2$ (car ln s.↑ sur

d'où le tableau de signe suivant.

x		$-\ln 2$		0	
x	−		−	0	+
$2e^x-1$	−	0	+		+
Produit	+	0	−	0	+

d'où $S =]-\infty; -\ln 2] \cup [0; +\infty[$

(II) ① $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ est du type $\frac{u'}{u}$

d'où $F(x) = \ln|\sin x| + K$ et sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ $\sin x < 0$

d'où $F(x) = \ln(-\sin x) + K$, $K \in \mathbb{R}$

② $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = \frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ est du type $u'u^{1/2}$

d'où $F(x) = \frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}(\ln x)\sqrt{\ln x} + K$, $K \in \mathbb{R}$

③ $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+7)^3} = \dfrac{1}{2} \underbrace{\dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x}+7)^3}}_{\text{du type } u'u^{-3}}$

d'où $F(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(e^{2x}+7)^2} \times \dfrac{1}{(-2)} + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad F(x) = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{(e^{2x}+7)^2} + K$

④ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x}$ est du type $u'e^{u}$

d'où $F(x) = e^{\tan x} + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$.

III ① $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$

$= \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \times \dfrac{\sin x}{x}$

$\left.\begin{array}{l} X = \sin x \\ \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$

et par H $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc par produit $\lim\limits_{0} f = 1$

② $f(x) = \ln(\sin x) - \ln(x)$

$= \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{\sin x}{x} \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{0} f = 0$

③ $f(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

$= x \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = x \ln(x^2+1) - x \ln x^2$

$= x \ln(x^2+1) - 2x \ln x$

par composée $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x^2) = 0$

et donc par produit $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(1+x^2) = 0$.

par th $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

Donc par somme, $\lim\limits_{0} f = 0$

④ $f(x) = x e^{1/x} = \dfrac{e^{1/x}}{1/x}$.

$$\left.\begin{array}{l} X = 1/x \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{0^+} f = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} X = 1/x \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 1/x = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$

et donc par produit $\lim\limits_{x \to 0^-} f = 0$.

⑤ $f(x) = \dfrac{e^x}{3x^2+5}$

$= \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{3x^2+5}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{3x^2+5} = \dfrac{1}{3}$ (par th)

donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

⑥ $f(x) = \dfrac{e^{4x}-1}{3x}$

$= \dfrac{e^{4x}-1}{4x} \times \dfrac{4}{3}$

et par composée $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{4x} = 1$ donc par produit, $\lim\limits_{0} f = \dfrac{4}{3}$

IV $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x}$; $I = \mathbb{R}_+^*$

1 $g(x) = 1 + x - x\ln x$

a par th $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$ d'où par somme, $\lim\limits_{0} g = 1$

$x - x\ln x = x(1-\ln x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1-\ln x) = -\infty$

donc par somme $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

b g dérivable sur I d'après les règles de dérivation.

$\forall x \in I,\ g'(x) = 1 - \ln x - 1$
$= -\ln x.$

d'où $g'(x) > 0 \iff \ln x < 0 \iff x < 1$

d'où le tableau de variations de g :

x	0		1	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	0 $\searrow$	$-\infty$

c sur $]0;1]$ $g \uparrow$ et $\lim\limits_{0} g = 1$ donc $g(x) \geqslant 1 > 0$.

sur $[1;+\infty[$ g décroissante strictement
g continue car dérivable
$g(1) = 2$; $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$
$0 \in]-\infty; 2]$

donc par th de la bijectº
$g(x) = 0$ admet une uniq
solutº α dans l'intervalle [

De plus comme il n'y a pas de solutº à $g(x) = 0$ sur $]0,1]$, on déduit que $g(x) = 0$ admet une unique solutº sur I.

Par balayage à la calculatrice on a $\left.\begin{array}{l} g(3,59) > 0 \\ g(3,6) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3,59 < \alpha < 3,$

d Sur $]0,1]$ $g(x) > 0$

Sur $[1;+\infty[$ g décroissante donc pour $1 < x < \alpha$ on a $g(x) > g(\alpha$
$\Rightarrow g(x) > 0$

et pour $\alpha < x$ on a $g(\alpha) > g(x)$ donc $0 > g(x)$

d'où le tableau de signe de g :

x	0		α	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$

② ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} 1+x = 1$ $\Big\}$ donc par quotient, $\lim\limits_{0} f = -\infty$

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1+x}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$ (par th) et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (par th)

donc par produit $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

ⓑ $x \mapsto \ln x$ dérivable sur I par th.

$x \mapsto 1+x$ dérivable et non nulle sur I

d'où par quotient f dérivable sur I et

$\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{(1+x)\frac{1}{x} - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{1+x - x\ln x}{x(1+x)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

ⓒ Sur I, $x(1+x)^2 > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		α		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ⓓ $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha} - \frac{1}{\alpha}$

$= \frac{\alpha \ln \alpha - (1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)} = \frac{-g(\alpha)}{\alpha(1+\alpha)} = 0$

d'où $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

On a d'après (1c) $3{,}59 < \alpha < 3{,}6$ d'où par inverse $\frac{1}{3{,}6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3{,}59}$

et donc $0{,}27 < f(\alpha) < 0{,}28$ car $\frac{1}{3{,}6} \simeq 0{,}277\ldots$ et $\frac{1}{3{,}59} \simeq 0{,}2785\ldots$

ⓔ Le point d'intersect° de $\mathcal{C}$ et (Ox) a pour abscisse satisfaisant $f(x)=0$

$f(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$

d'où $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ c'est à dire $T : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$