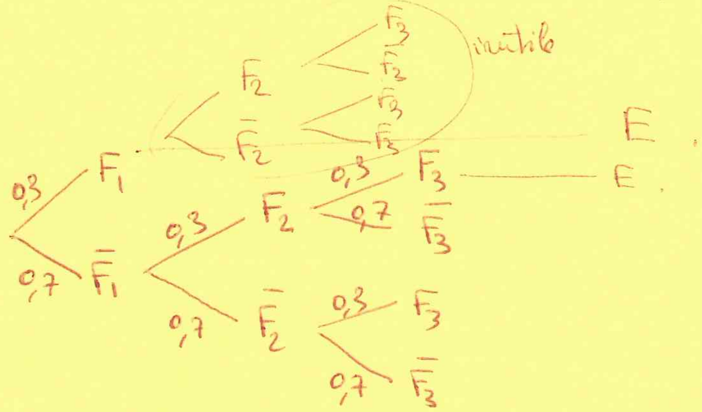
(I) Bac Juin 2013

(A) (1) $T \sim \mathcal{E}_\lambda$ donc $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{0{,}0002}=5000$ heures.

(2) $P(T\geqslant 6000)=e^{-\lambda 6000}\simeq 0{,}301$ (à 10^{-3})

(B) (1)



(2) $E = F_1 \cup (F_2\cap F_3)$

$= F_1 \cup (\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3)$

et donc d'après l'arbre $P(E)=P(F_1)+P(\overline{F_1})\times P_{\overline{F_1}}(F_2)\times P_{\overline{F_1}\cap F_2}(F_3)$

$=0{,}3+0{,}7\times0{,}3\times0{,}3$

$=0{,}363$

(3) $P_{E\geqslant 6000}(F_1)=\dfrac{P(F_1\cap E)}{P(E)}=\dfrac{P(F_1)}{P(E)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}363}\simeq 0{,}826$ (à 10^{-3})

(C) (1) D'après le cours l'intervalle de fluctuat° asymptotique au seuil de 95 % est

$I=\left[0{,}02-1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}02\times0{,}98}}{\sqrt{400}};\ \dots\right]\simeq[6{,}28.10^{-3};\ 0{,}03372]\simeq[0{,}00628,\ 0{,}03372]$

(2) Le choix des 400 vannes est assimilé à un tirage avec remise

on a $n=400\geqslant30$ $p=0{,}2$ donc $np\geqslant5$; $n(1-p)\geqslant5$

donc d'après le cours la fréquence f obtenue doit satisfaire $P(f\in I)\simeq0{,}95$.

ici $f=\dfrac{10}{400}=0{,}025$

on a $f\in I$ donc on ne peut rejeter l'hypothèse selon laquelle 2% des vannes sont défectueuses.

① $D \sim \mathcal{N}(800, 40^2)$

① $P(D \in [760; 840]) \simeq 0,683$. à 10^{-3}.

② $P(D \leq 880) \simeq 0,977$

③ L'industriel est en rupture de stock si la demande est supérieure à 880.

$P(D > 880) = 1 - P(D \leq 880) \simeq 0,0228$ donc il y a 2,28 % de chance d'être en rupture de stock. L'industriel se trompe.

II ① Soit $P' : 2x + y + 2z - 24 = 0$ le plan donné

$\vec{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ normal à P' et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ normal à P

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ P et P' ne sont pas parallèles.

① est faux.

② $\vec{AC}\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ vect. dir de (AC)

donc (AC) $\begin{cases} x = -3t \\ y = 0 \\ z = 20 + 5t \end{cases}$ et en posant $t = (t' - 3)$

on a (AC) $\begin{cases} x = 9 - 3t' \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t' \end{cases}$ ② Vrai.

(on peut aussi vérifier que $M(9, 0, 5) \in (AC)$!)

③ $\vec{DE}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \vec{DE} = 10 - 4 - 6 = 0$ donc $(DE) \parallel P \Rightarrow$ ③ Faux

④ $\vec{AB}\begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\vec{DE}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} \cdot \vec{DE} = -12 \times 5 + 4 \times 15 = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{DE} = -12 \times 5 + 3 \cdot 20 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (DE) \perp (ABC) \longrightarrow$ ④ Vrai

III A 1 a) on a $g(x) \geqslant 0$ sur $[0,1]$ et g continue

donc l'aire $\mathcal{A}_1$ vaut $\mathcal{A}_1 = \int_0^a g(t)\,dt = \int_0^a 1+e^{-t}\,dt$

$$= \left[t - e^{-t}\right]_0^a = a - e^{-a} + 1$$

b) de m̂ $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 1+e^{-t}\,dt = \left[t - e^{-t}\right]_a^1$

$$= 1 - e^{-1} - a + e^{-a}$$

2 a) $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$

f dérivable sur $[0,1]$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 2 + 2e^{-x}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ d'où $f'(x) \geqslant 2 > 0$ sur $[0,1]$ donc f croissante sur $[0,1]$

d'où

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$

avec $f(0) = -2 + \frac{1}{e}$

$f(1) = 2 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{1}{e}$

b) f est continue sur $[0,1]$.
f est strictement croissante
$f(0) < 0$; $f(1) > 0$ donc $0 \in [f(0), f(1)]$

donc d'après le th de la bijectᵒ ∃! existe α unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

par balayage à la calculatrice $\left.\begin{array}{l} f(0,45) < 0 \\ f(0,46) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \simeq 0,45$.

3) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff a - e^{-a} + 1 = 1 - a - e^{-1} + e^{-a}$

$\iff 2a - 2e^{-a} + \frac{1}{e} = 0$

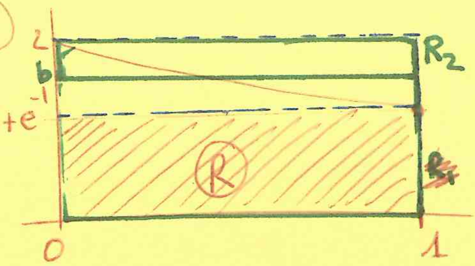
$\iff f(a) = 0$

$\iff a = \alpha$ d'après A2b

$a \simeq 0,45$.

B

1



Si on coupe par $y=b$ alors l'aire de la partie $\mathcal{A}_2$ du haut est inférieure à celle du rectangle R_2 d'où $\mathcal{A}_2 \leq (2-b)$

donc pour $b > 1+e^{-1}$ alors $2-b \leq 1-e^{-1}$ donc $\mathcal{A}_2 \leq 1-e^{-1}$

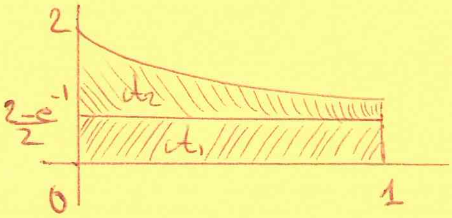
et par contre $\mathcal{A}_1 \geqslant \mathcal{A}(R) = 1+e^{-1}$

donc pour $b > 1+e^{-1}$ $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$.

2 l'aire totale $\mathcal{A}$ vaut $\mathcal{A} = \int_0^1 g(t)\,dt = [t - e^{-t}]_0^1$

$= 1 - e^{-1} + 1 = 2 - e^{-1}$

Prenons alors $b = \dfrac{2-e^{-1}}{2}$ et la situat° se modélise par le graphique suivant



l'aire de $\mathcal{A}_1$ vaut $1 \times \left(\dfrac{2-e^{-1}}{2}\right) = \dfrac{2-e^{-1}}{2}$

l'aire $\mathcal{A}_2$ vaut $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1 = \dfrac{2-e^{-1}}{2}$

IV A 1) Affecter à u la valeur $\frac{n \times u+1}{2(n+1)}$

Affecter à n la valeur $n+1$

2) Avant le fin tant que rajouter la ligne afficher u.

3) On conjecture (u_n) décroissante et (u_n) converge vers 0.

B 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1$$
$$= (n+1) \cdot \frac{n u_n + 1}{2.(n+1)} - 1$$
$$= \frac{n u_n + 1}{2} - 1 = \frac{n u_n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n .$$

Donc (v_n) géométrique de raison $1/2$ et 1er terme $v_1 = u_1 - 1 = \frac{1}{2}$.

2) Par th on a alors $v_n = v_1 q^{n-1}$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

alors $\forall n \geq 1$ $v_n = n u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{n}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{(1/2)^n + 1}{n} \quad \forall n \geq 1 .$$

3) $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc par th $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ (par quotient)

4) $\forall n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(1/2)^{n+1} + 1}{n+1} - \frac{(1/2)^n + 1}{n}$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1) \right)$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{2} - (n+1)\right) - 1 \right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(0{,}5^n \left(-\frac{n}{2} - 1\right) - 1 \right)$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)} \left(0{,}5^n \left(1 + \frac{n}{2}\right) + 1 \right)$$

Q.f.l.

$\forall n \geq 1 \quad \left.\begin{array}{l}(0,5)^n \geq 0 \\ n(n+1) > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1+(1+0,5n)0,5^n}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$

donc $(U_n) \uparrow$.

(C) Il suffit de remplacer le tant que par

→ tant que $U \geq 0,001$

et d'afficher en sortie n

(IV) spécialité.

(A) ① les lignes | Afficher i | Afficher a | Afficher b — doivent se placer après le ~~...~~ fin tant que.

(sinon l'algo n'affiche rien)

② Conjectures. $(a_n) \downarrow$ et (a_n) converge vers 18

$(b_n) \uparrow$ et (b_n) converge vers 12.

(B) ① d'après les données de l'énoncé $\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n. \end{cases}$

on a donc $U_{n+1} = MU_n$ où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

② Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$

Initialisat°: pour $n=1$ il est clair que l'égalité est vraie.

Hérédité: Soit $q \in \mathbb{N}^*$ supposons la ppté vraie au rang q

et montrons là au rang $q+1$

$$M^{q+1} = M^q \times M$$

Calculons le produit :

$$\begin{pmatrix} 0,6+0,4\times0,5^q & 0,6-0,6\times0,5^q \\ 0,4-0,4\times0,5^q & 0,4+0,6\times0,5^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_q & \\ & \end{pmatrix}$$

le premier des coeffs C vaut.

$$C = (0,6+0,4\times0,5^q)\times0,8 + 0,2(0,6-0,6\times0,5^q)$$
$$= 0,6(0,8+0,2) + 0,5^q(0,8\times0,4 - 0,6\times0,2)$$
$$= 0,6 + 0,5^q\times0,2$$
$$= 0,6 + 0,5^q\times0,5\times0,4 = 0,6 + 0,5^{q+1}\times0,4.$$

et ce coefficient correspond bien au coefficient du rang q+1
l'hérédité est démontrée.

③ $$U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} (0,6+0,4\times(0,5)^n)\times20 + (0,6-0,6\times0,5^n)\times10 \\ (0,4-0,4\times0,5^n)\,20 + (0,4+0,6\times0,5^n)\times10 \end{pmatrix}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$,
ainsi $a_n = 0,6\times20 + 0,6\times10 + 0,5^n(20\times0,4 - 10\times0,6)$
$= 18 + 0,5^n\times2$

④ $|0,5| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 18$

La populat° sur l'île A se stabilise à 18 millions d'individus ...