Bac Blanc – 4 mars 2013

I

A

1. a) $f(x) = 5\ln(x+3) - x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$.

f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0 \quad f'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1$

$$= \frac{5-(x+3)}{x+3} = \frac{2-x}{x+3}$$

Sur $\mathbb{R}_+$; $x+3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$

b) On deduit alors le tableau de variation de f.

x	0		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

c) $\forall x \geq 0 \quad x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 5\ln x - x + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

$$= 5\left(\ln x + \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) - x$$

$$= 5\left(\ln(x+3)\right) - x \quad (\text{car } \ln a + \ln b = \ln ab).$$

$$= f(x)$$

ainsi l'égalité est démontrée

d) On a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} X = 1+\frac{3}{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par composée } \lim_{x\to 1} \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$$

donc par somme $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

e) Voir tableau.

2. a) * Sur $[0;2]$ f est croissante donc $x > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$ c'est-à-dire $f(x) \geq 5\ln 3 > 0$
donc $f(x) = 0$ n'a pas de solut°.

* Sur $[2;+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est strictement décroissante.} \\ f \text{ est continue} \\ f(2) = 5\ln 5 - 2 > 0 ; \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \\ 0 \in]-\infty; 5\ln 5 - 2[\end{array}\right\}$$

donc d'après le th de la biject°
il existe $\alpha \in [2;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$

ⓑ On a $f(14) > 0$ et $f(15) < 0 \Rightarrow \alpha \in [14;15]$

A la calculatrice on obtient $\alpha \simeq 14,23$

ⓒ On sait que sur $[0,2]$ $f(x) > 0$

Sur $[2;+\infty[$ f est décroissante ainsi pour $2 \leq x < \alpha$ on a $f(x) > f(\alpha)$

$\Rightarrow f(x) > 0$

et pour $x > \alpha$, on a $f(x) < f(\alpha) \Rightarrow f(x) < 0$.

d'où le tableau de signe de f.

x	0		2		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$	

Ⓑ ① ⓐ Voir graphique feuille annexe.

ⓑ On conjecture que (U_n) est une suite croissante.

② ⓐ $g(x) = 5\ln(x+3)$ sur $\mathbb{R}_+$

g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0$ $g'(x) = \frac{5}{x+3} > 0$ sur $\mathbb{R}_+$

ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

ⓑ d'après Ⓐ $f(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0 \Longleftrightarrow 5\ln(\alpha+3) = \alpha$

$\Longleftrightarrow g(\alpha) = \alpha$.

ⓒ et ⓓ Soit P_n la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie

Initialisat°. $u_0 = 4$; $u_1 = g(u_0) = 5(\ln(4+3)) = 9{,}72$ donc $u_0 \leq u_1 \leq \alpha$

$\Rightarrow P_0$ vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ supposons P_k vraie et montrons P_{k+1} vraie.

P_k vraie $\Rightarrow 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$

$\Rightarrow g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$ car $g \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow 5\ln 3 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$

d'où P_{k+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie

c'est à dire $(U_n) \nearrow$ et $\forall n$ $u_n \in [0,\alpha]$.

ⓔ $(U_n) \nearrow$ et majorée par α donc (u_n) converge vers $l \in [0,\alpha]$

$\left.\begin{array}{l}(U_n) \text{ converge vers } \ell \\ U_{n+1} = g(U_n) \\ g \text{ est continue}\end{array}\right\}$ donc d'après le th du point fixe $g(\ell) = \ell$

c'est-à-dire $g(\ell) = \ell \Leftrightarrow g(\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \alpha$ d'après la partie A.

ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

③ ⓐ Cet algorithme calcule les valeurs successives de (u_n) et comme (u_n) converge vers $\alpha \simeq 14{,}23$ et $(u_n) \nearrow$ ainsi la condition $u_n - 14{,}2 < 0$ est réalisée pour des valeurs n assez grandes.

Donc l'algorithme s'arrête.

ⓑ Lorsque l'algorithme s'arrête il affiche $14{,}22315$ (arrondi à 10^{-5})

II A ① $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4 < 0$ donc (E) admet deux solutions $z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$

$z_2 = 1-i$

② $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$.

$AM_1 = |z_1 - z_A|$

$= |1+i-1| = |i| = 1$

$AM_2 = |1-i-1| = |-i| = 1$ donc $M_1, M_2 \in \mathcal{C}(A, 1)$.

B ① Voir figure.

② $z' = \frac{2z-1}{2z-2}$ $z \neq 1$.

$\forall z \neq 1$

$$(z'-1)(z-1) = \left(\frac{2z-1}{2z-2} - 1\right)(z-1)$$

$$= \left(\frac{2z-1-(2z-2)}{2z-2}\right)(z-1)$$

$$= \frac{1}{2z-2}(z-1) = \frac{1}{2(z-1)}(z-1) = \frac{1}{2}$$

③ $\forall M \neq A$

- $AM \times AM' = |z-1| \times |z'-1|$

  $= |(z'-1)(z-1)| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

- $M(z) \neq A$ donc $z \neq 1$

  ainsi $(z'-1)(z-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow z'-1 \neq 0 \Rightarrow z' \neq 1 \Rightarrow M' \neq A$.

- $(z'-1)(z-1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \arg[(z'-1)(z-1)] = \arg\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2\pi)$

$\Rightarrow \arg(z'-1) + \arg(z-1) = 0 \quad (2\pi)$

$\Rightarrow \arg(z_{M'} - z_A) + \arg(z_M - z_A) = 0 \ (2\pi) \Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \ (2\pi)$.

④ Voir figure. $\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

⑤ d'après la question ③ on a $AP' = \frac{1}{2AP} = \frac{1}{2}$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{AP'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AP}) \quad (2\pi)$

$= -\pi/4 \quad (2\pi)$ d'où la construct° de P'

6) a) Soit $M(z) \in D$ avec $z = x + iy$ et $x = \frac{3}{4}$.

alors $z' = \frac{2z-1}{2(z-1)}$

$$= \frac{2(\frac{3}{4}+iy)-1}{2(\frac{3}{4}+iy-1)} = \frac{\frac{1}{2}+2iy}{-\frac{1}{2}+2iy} = \frac{1+4iy}{-1+4iy}$$

ainsi $|z'| = \frac{|1+4iy|}{|-1+4iy|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 1$ donc $M' \in \mathcal{C}(O,1)$.

b) Soit $M' \in \mathcal{C}'$ donc il existe θ tel que $z' = e^{i\theta}$

$M(z)$ antécédent de $M'(z') \iff \frac{2z-1}{2z-2} = e^{i\theta}$

$$\iff 2z - 1 = e^{i\theta}(2z-2)$$
$$\iff 2z(1-e^{i\theta}) = -2e^{i\theta} + 1$$

ainsi pour $\theta = 0$ il n'y a pas d'antécédent car $1 - e^{i\theta} = 0$.

Finalement pour $z' = 1$ on a $M'(1)$ n'a pas d'antécédent par f.

Remarque : Tout cela est inutile. D'après II b3. $\forall M \neq A$; $M' \neq A$
or $A(1) \in \mathcal{C}'$ donc A n'admet pas d'antécédent.

III I ① $g(x) = e^x - xe^x + 1 \quad ; x \geq 0.$

On a $g(x) = e^x(1-x) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

} donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(1-x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} g = -\infty.$

② ③ g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = e^x - e^x - xe^x$
$= -xe^x$

et sur $\mathbb{R}_+$; $-x \leq 0$; $e^x \geq 0$ donc par produit $g'(x) \leq 0$.

Ainsi g décroissante sur $\mathbb{R}_+$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

④ a) A l'aide du th de la bijection, on montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \simeq$
En fait $1{,}27 \leq \alpha \leq 1{,}28$

b) $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$

$\iff e^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \boxed{e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}}$

⑤ g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) \Rightarrow g(x) > 0.$

$x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0.$

d'où le tableau de signe de $g(x)$:

x	0		α	
$g(x)$		$+$	0	$-$

II ① $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$

A est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $A'(x) = \dfrac{(e^x+1) \times 4 - e^x \times 4x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x+1)^2}$

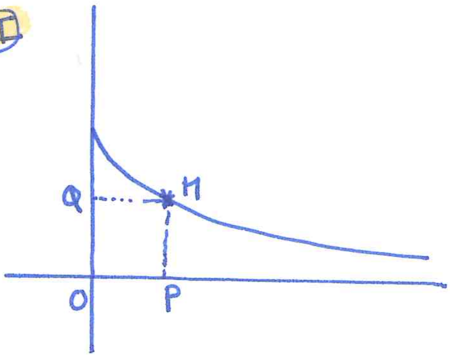
$= \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$

Sur $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{4}{(e^x+1)^2} > 0$ donc $A'(x)$ est du signe de $g(x)$.

② On déduit le tableau de variation de A

x	0		α		$+\infty$
$A(x)$		$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

III



① l'aire de OPMQ vaut $OP \times OQ = x \times f(x) = A(x)$
ainsi d'après le tableau de variation de A on déduit que l'aire est maximale lorsque $x = \alpha$.

② La tangente T au point d'abscisse α à $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$

Le coeff dir de PQ est $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha}$

On a alors $T // (PQ) \iff f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

$\iff \alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = 0$

Calculons $\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = \frac{-4\alpha e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2} + \frac{4}{e^{\alpha}+1}$

$= \frac{4}{(e^{\alpha}+1)^2}\left((e^{\alpha}+1) - \alpha e^{\alpha}\right)$

$= \frac{4}{(e^{\alpha}+1)^2}\, g(\alpha) = 0$

On a donc bien $T // (PQ)$.

IV ① On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad (xe^{-x})' = -xe^{-x} + e^{-x}$

ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \; xe^{-x} = e^{-x} - (xe^{-x})'$

et donc par intégrat° $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx = \int_0^1 e^{-x}dx - \int_0^1 (xe^{-x})'dx$

$= [-e^{-x}]_0^1 - [xe^{-x}]_0^1$

$= 1 - e^{-1} - (e^{-1} - 0) = 1 - 2e^{-1}$

② Les fonctions $f_i \; ; i = 1, 2, \dots$ semblent être positives sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$ la suite $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ semble être décroissante.

I_n est donc l'aire sous la courbe C_n délimitée par C_n ; $(x'x)$; $(y'y)$ et la droite d'équation $y=1$.

On conjecture alors (I_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

③ ⓐ $\forall x \in [0,1]$; $x^n e^{-x} \geqslant 0$ donc par th de positivité

on a $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx \geqslant 0$.

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [0,1]$ on a $x \leqslant 1$

$\Rightarrow x^{n+1} \leqslant x^n \quad (\times x \text{ avec } x \geqslant 0)$

$\Rightarrow x^{n+1}e^{-x} \leqslant x^n e^{-x} \quad (\times e^{-x} \text{ avec } e^{-x} \geqslant 0)$

donc par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre. $\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

c'est-à-dire $I_{n+1} \leqslant I_n \Rightarrow (I_n)$ décroissante.

(I_n) décroissante et minorée donc (I_n) converge (par th).

(4a). $\forall x \in [0,1]$ $x \geqslant 0 \Rightarrow -x \leqslant 0 \Rightarrow e^{-x} \leqslant 1$ car exp ↑ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow x^n e^{-x} \leqslant x^n \quad (\times x^n \text{ avec } x^n \geqslant 0)$

ⓑ Par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre on a $\int_0^1 x^n e^{-x}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx \Rightarrow I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Ainsi $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le th des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Bac Blanc - Spécialité.

III Chiffrement de Hill.

A ① $23\times(-9)-26\times(-8)=1 \Rightarrow (-9,-8)$ solution de $23x-26y=1$

② On déduit alors par différence $23(x+9)-26(y+8)=0$

ainsi $23(x+9)=26(y+8)$ $(*)$

donc $23 \mid 26(y+8)$ et de plus $23\wedge 26=1$ (car 23 est premier)

donc d'après le th de Gauss $23 \mid y+8 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $y+8=23k$

alors avec $(*)$ on a $23(x+9)=26\times 23k \Rightarrow x+9=26k$.

finalement nous avons $x=-9+26k$ et $y=-8+23k$

Vérifions les solutions : $23x-26y = 23(-9)+23\times 26k-26\times(-8)-26\times 23k$
$= 1$

donc on a bien $\mathcal{S}=\{(-9+26k,-8+23k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$

③ On cherche à résoudre $\begin{cases} 0\leq a\leq 25 \\ 23a\equiv 1\ (26)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq a\leq 25 \\ 23a=1+26q,\ q\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq a\leq 25 \\ 23a-26q=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq a\leq 25 \\ (a;q) \text{ sol de } (E)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq a\leq 25 \\ a=-9+26k\,;\,q=-8+23k\end{cases}$

d'où $0\leq -9+26k\leq 25 \Leftrightarrow 9\leq 26k\leq 34$

il existe une unique valeur k satisfaisant cela : $k=1$.
On a alors $a=17$

ainsi $23\times 17\equiv 1\ (26)$ c.à.d 17 inverse de 23 modulo 26.

B **1** ST $\longrightarrow (18;19) \longrightarrow A\begin{pmatrix}18\\19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\times18+3\times19\\7\times18+4\times19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}255\\202\end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix}255\\202\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}21\\20\end{pmatrix}$ (26)

donc le mot ST est encrypté par VU.

2 **a** $A = \begin{pmatrix}11&3\\7&4\end{pmatrix}$; $\det A = 11\times4-3\times7 = 23 \neq 0$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix}4&-3\\-7&11\end{pmatrix}$

b $Y = AX \iff A^{-1}Y = \underbrace{A^{-1}A}_{=I}X \iff X = A^{-1}Y.$

c Essayons de décoder NT (voir exemple)

on a NT $\leftrightarrow$ (13, 19)

alors $A^{-1}\begin{pmatrix}13\\19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/23\\118/23\end{pmatrix}$ en effet $\frac{1}{23}\begin{pmatrix}4&-3\\7&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5/23\\\frac{118}{23}\end{pmatrix}$

et donc $X = \begin{pmatrix}-5/23\\118/23\end{pmatrix}$. Ce ne sont pas des nombres entiers entre 0 et 25 et on ne peut pas décoder.

3 **a** $(S_1) \iff \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 & (26)\\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 & (26).\end{cases}$ et $S_2 \iff \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 & (26)\\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 & (26)\end{cases}$

pour vérifier si S_2 est satisfait, il suffit de calculer et de vérifier.

$$\begin{aligned}4y_1 + 23y_2 &\equiv 4(11x_1+3x_2) + 23(7x_1+4x_2) \quad (26)\\ &\equiv x_1(4\times11+7\times23) + x_2(4\times3+23\times4) \quad (26)\\ &\equiv x_1(44-21) + x_2(12-12) \quad (26)\\ &\equiv 23x_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}19y_1 + 11y_2 &\equiv 19(11x_1+3x_2) + 11(7x_1+4x_2) \quad (26)\\ &\equiv x_1(19\times11+7\times11) + x_2(19\times3+11\times4) \quad (26)\\ &\equiv x_1(-7\times11+7\times11) + x_2(-7\times3+11\times4) \equiv 23x_2 \ (26)\end{aligned}$$

Le système S_2 est donc satisfait

ⓑ D'après Ⓐ on a $23 \times 17 \equiv 1 (26)$

ainsi (x_1, x_2) satisfait (S_2)

$$\iff \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 & (26) \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 & (26) \end{cases}$$

on multiplie par 17 — on multiplie par 23.

$$\iff \begin{cases} x_1 \equiv 17 \times 4y_1 + 17 \times 23y_2 & (26) \\ x_2 \equiv 17 \times 19y_1 + 17 \times 11y_2 & (26) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 & (26) \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 & (26). \end{cases}$$

ⓒ Si (x_1, x_2) satisfait (S_3) alors vérifions que S_1 est satisfait

on a alors
$$\begin{aligned} 11x_1 + 3x_2 &\equiv 11(16y_1 + y_2) + 3(11y_1 + 5y_2) & (26) \\ &\equiv y_1(11 \times 16 + 3 \times 11) + y_2(11 + 15) & (26) \\ &\equiv y_1 \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 &\equiv 7(16y_1 + y_2) + 4(11y_1 + 5y_2) & (26) \\ &\equiv y_2 & (26) \end{aligned}$$

ainsi (S_1) satisfait.

finalement on a montré $(S_1) \iff (S_3)$

ⓓ d'après (S_3) on déduit donc

$Y = AX \ (26) \iff X = BY \ (26)$ où $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$

ⓔ ainsi YJ correspond à $Y = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$; $BY = \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix}$ (26)

d'où YJ se décode par DX.