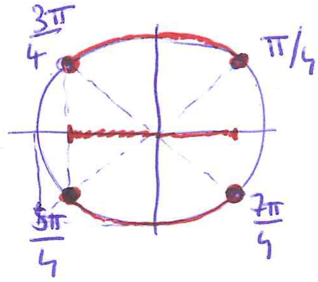
DS 1

I $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$

$\iff |\cos x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (car $\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$\iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



On a donc

$$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]}$$

II $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (E)

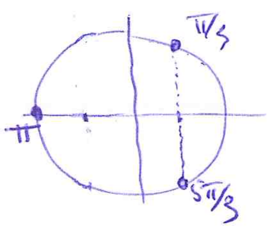
$\iff \begin{cases} X = \cos x \\ 2X^2 + X - 1 = 0 \quad (E') \end{cases}$

Résolution de (E') : $\Delta = 9 > 0 \Rightarrow$ (E') admet 2 racines :

d'où $X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = -1$

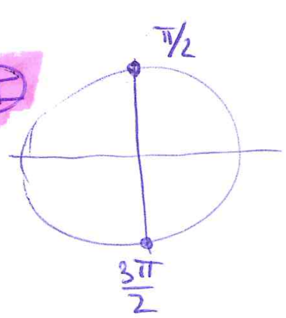
d'où (E) $\iff \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$

$\iff x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ ou $x = \pi$



$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \pi\right\}}$$

III



$\cos 3x = 0$

$\iff 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

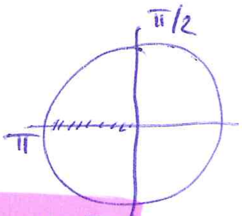
Remarque
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}$
donc 6 solut° dans $[0, 2\pi]$

on cherche les solutions dans $[0, 2\pi]$: $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}}$

IV $\sin x = \frac{2}{7}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2$

$= \frac{45}{49}$



d'où $|\cos x| = \frac{\sqrt{45}}{7} \iff |\cos x| = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

mais pour $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$ $\cos x < 0$ donc $\boxed{\cos x = -\frac{3\sqrt{5}}{7}}$

On a par la suite $\cos(2x) = \cos(x+x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \frac{45}{49} - \frac{4}{49}$

$\boxed{\cos 2x = \frac{41}{49}}$

et $\sin(2x) = \sin(x+x)$

$= 2 \sin x \cos x$

$= 2 \times \frac{2}{7} \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)$

$\boxed{\sin(2x) = -\frac{12}{49}\sqrt{5}}$.

V 1 $A = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$

d'où $A^2 = 4 - \sqrt{7} - 2.\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}} + 4 + \sqrt{7}$

$= 8 - 2\sqrt{16-7}$

$= 8 - 2 \times 3$

$= 2$

2 On a $4 - \sqrt{7} < 4 + \sqrt{7}$

$\Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{7}} < \sqrt{4+\sqrt{7}}$ car $\sqrt{\cdot} \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow A < 0$. $1 \Rightarrow |A| = \sqrt{2}$ et donc $\boxed{A = -\sqrt{2}}$.

VI ① $P(x) = x^2 + (2m+1)x + 1$

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 1 - 4$$
$$= 4m^2 + 4m - 3$$

Soit Δ' le discriminant : $\Delta' = 16 + 3 \times 16 = 64$

Donc $\Delta = 0$ pour deux valeurs de m : $m_1 = \dfrac{-4+8}{8} = \dfrac{1}{2}$

$$m_2 = \frac{-4-8}{8} = -\frac{3}{2}$$

d'où le signe de Δ :

m		$-3/2$		$1/2$	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

donc pour $m \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$ on a $\Delta > 0$ et P admet 2 racines

pour $m \in]-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[$ $\Delta < 0$ donc P n'a pas de racine

pour $m \in \{-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\}$; $\Delta = 0 \Rightarrow P$ a une racine unique

② 3 racine de P $\iff P(3) = 0$

$$\iff 9 + 3(2m+1) + 1 = 0$$
$$\iff 6m + 13 = 0$$
$$\iff \boxed{m = -\frac{13}{6}}$$

Pour $m = -\dfrac{13}{6}$; P admet 3 comme racine.

VII $\dfrac{8-x^2}{(x+2)(3-x)} \leq 1 \iff \dfrac{8-x^2-(x+2)(3-x)}{(x+2)(3-x)} \leq 0$

$$\iff \frac{2-x}{(x+2)(3-x)} \leq 0$$

x		-2		2		3	
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{2-x}{(x+2)(3-x)}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

D'où $\boxed{S =]-\infty\,;-2[\, \cup\, [2\,;3[}$

VIII $P(x) = x^3+2x^2-x-2$

① $P(-2) = -8+8+2-2 = 0 \Rightarrow -2$ racine de P.

② P se factorise par $(x+2)$

<u>Méthode 1 :</u>

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & -x & -2 & x+2 \\ \cline{5-5} x^3 & +2x^2 & & & x^2-1 \\ \cline{1-2} & 0 & -x & -2 & \\ & & -x & -2 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

donc $\boxed{\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x^2-1) \\ &= (x+2)(x-1)(x+1) \end{aligned}}$

<u>Méthode 2</u>

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2(x+2) - (x+2) \\ &= (x+2)(x^2-1) \\ &= (x+2)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

IX ① Soit $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

$\Delta = 25-24 = 1$ donc P admet 2 racines $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $x_2 = 2$

Signe de P :

x		2		3	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} P(x) = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{2^+} f_1(x) = -\infty} \text{ (par quotient)}$$

$\lim_{x \to 2^-} P(x) = 0^+$ donc par quotient, $\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = +\infty$

On déduit que la droite $\Delta : x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

② On a $f_2(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \text{ (par somme)}$$

et $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit $\lim_{+\infty} f_2 = +\infty$.

de même $\boxed{\lim_{-\infty} f_2 = -\infty}$.