DS 2 - 2 oct 2012

I $f_1(x) = x^3 - 5x^2\sqrt{x} - 2x^2 + 12$

$$= x^3\left(1 - \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + \frac{12}{x^3}\right).$$

par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + \frac{12}{x^3} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f_1 = +\infty}$.

II $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{3x^2 - 3x + 4}$

f_2 est une fraction rationnelle donc par th

on a $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}}$

on déduit que la droite d'équation $y = \frac{1}{3}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

III $f_3(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x^2 + x - 2}$

Nous avons -2 racine de $x^2 + x - 2$ d'où $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

d'où le signe

x		-2		1	
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to-2} x^2 - 6 = -2$

$\lim\limits_{x\to-2^+} x^2 + x - 2 = 0^-$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{-2^+} f_3 = +\infty}$.

$\lim_{x \to -2^-} x^2+x-2 = 0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim_{-2^-} f_3 = -\infty}$

On déduit que la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

IV Nous avons $x^2+x-12 = (x-3)(x+4)$

et $x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$

d'où
$$f_4(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-7x+12}$$
$$= \frac{x+4}{x-4}$$

et donc $\boxed{\lim_{3} f_4 = -7}$

V
$$f_5(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$$
$$= \frac{\sin(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2-1}$$
$$= \frac{\sin(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{x-1} \quad (\text{car } x^2-1 = (x+1)(x-1))$$

$$\left.\begin{array}{l} X = x+1 \\ \lim_{x \to -1} (x+1) = 0 \\ \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Composée}} \lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1$$

D'autre part $\lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$ donc par produit $\boxed{\lim_{-1} f_5 = -\frac{1}{2}}$

VI f_6 est un polynôme ainsi

$$\boxed{\lim_{-\infty} f_6 = \lim_{x\to-\infty} x^6 = +\infty.}$$

VII $\forall x \neq 3 \qquad -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x-3}\right) \leq 1$

$$\Rightarrow -1 - \frac{1}{x^2-9} \leq f_7(x) \leq +1 - \frac{1}{x^2-9}$$

d'autre part $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

x		-3		$+3$	
$(x-3)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim_{x\to 3^-} (x-3)(x+3) = 0^-$ donc par quotient $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$

donc par produit puis somme $\lim_{x\to 3^-}\left(-1 - \frac{1}{x^2-9}\right) = +\infty$

d'où par comparaison $\boxed{\lim_{x\to 3^-} f_7(x) = +\infty.}$

On déduit que la droite d'équation $x=3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

VIII $\forall x > 0 \; ; \qquad -1 \leq \sin x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow -4 \leq 4\sin x^2 \leq 4 \qquad (\times 4 \text{ avec } 4>0)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4 \leq x^2 + 4\sin x^2 \leq 4 + 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-4}{5-x^2} \geq f_8(x) \geq \frac{4+3x^2}{5-x^2} \qquad (\div(5-x^2) \text{ avec } 5-x^2<0 \text{ (en } +\infty))$$

Par th $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4}{5-x^2} = -3$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4+3x^2}{5-x^2} = -3$

ainsi d'après le th des gendarmes $\boxed{\lim_{+\infty} f_8 = -3.}$

La droite d'équation $y=-3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

IX $f_9(x) = (7x^2+4x-32)^{21}$

$$\left.\begin{array}{l} X = 7x^2+4x-32 \\ \lim_{x\to-\infty} 7x^2+4x-32 = +\infty \text{ (par th).} \\ \lim_{X\to+\infty} X^{21} = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f_9(x) = +\infty.$$

X $f_{10}(x) = \frac{\sqrt{x^2-x^3}}{x}$

$= \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x}}{x}$

$= \frac{|x|}{x}\sqrt{1-x} = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x} = 1$

ainsi $\boxed{\lim_{0^+} f_{10} = +1 ; \quad \lim_{0^-} f_{10} = -1}$

Note : f n'est pas continue en 0.