oct 2012

# Devoir de Mathématiques N°3

**I** ① $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

ⓐ $g$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g'(x) = 3x^2 - 3$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

d'où le tableau de signe de $g'$ et le tableau de variat° de $g$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ (par th.)

$\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ (par th)

$g(-1) = -1$ ; $g(1) = -5$

* Sur $]-\infty ; 1]$ ; $-1$ est le maximum de $g$ donc $g(x) = 0$ n'a pas de solut° sur cet intervalle.

* Sur $[1 ; +\infty[$, . $g$ est strictement croissante
  . $g$ est continue car dérivable
  . $g(1) = -5$ ; $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$
  . $0 \in [-5 ; +\infty[$

donc par th de la biject° $g(x) = 0$ admet une unique solut° $\alpha \in [1, +\infty[$.

* Conclusion : $g(x) = 0$ admet une unique solut° $\alpha \in \mathbb{R}$.

ⓑ Par balayage à la calculatrice $\alpha \simeq 2{,}1$

ⓒ Sur $]-\infty, 1]$ ; $-1$ étant le maximum de $g$, on a $g(x) < 0$.
Sur $[1, +\infty[$ ; $g$ étant strictement croissante on a

si $x < \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha)$ c.à.d $g(x) < 0$
si $x > \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$ c.à.d $g(x) > 0$.

En conséquence on a

| $x$ | | $\alpha$ | |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

② ⓐ $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$

$f$ est une fract° rationnelle donc $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

| $x$ | | $-1$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\lim\limits_{x\to -1} 2x^3+3 = 1$

$\lim\limits_{-1^+} x^2-1 = 0^-$ ; $\lim\limits_{-1^-} x^2-1 = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{-1^+} f = -\infty$

$\lim\limits_{-1^-} f = +\infty$

On déduit que la droite $\Delta : x=-1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to 1} 2x^3+3 = 5$ ; $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-1 = 0^-$ $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$

On déduit que la droite $\Delta' : x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

ⓑ $f$ est dérivable sur $D$ d'après les règles de dérivabilité et

$\forall x \in D \quad f'(x) = \dfrac{(x^2-1)6x^2 - 2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{2x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$

ⓒ On déduit alors le signe de $f'(x)$ :

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $g(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |

Tableau de variations de $f$ : $\qquad f(\alpha) \simeq 6,3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

(d) Voir feuille

(e) On a $f(\alpha) - \dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1} = \dfrac{1}{\alpha^2-1}(2\alpha^3+3-6\alpha-9)$

$$= \frac{1}{\alpha^2-1}(2\alpha^3-6\alpha-6) = \frac{2g(\alpha)}{\alpha^2-1} = 0$$

d'où $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}}$

(II) $f_1'(x) = 4(x^2+2x-9)^3(2x+2)$

$$= 8(x+1)(x^2+2x-9)^3$$

$$f_2'(x) = 3\left(\frac{3x-5}{x^2+2}\right)^2 \frac{(x^2+2)\times 3 - (3x-5)\times 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= 3\left(\frac{3x-5}{x^2+2}\right)^2 \frac{-3x^2+10x+6}{(x^2+2)^2}$$

$$f_3'(x) = \left(\frac{3x-5}{x^2+2}\right)' \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{3x-5}{x^2+2}}}$$

$$= \frac{-3x^2+10x+6}{(x^2+2)^2} \times \frac{\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{3x-5}}$$

$$f_4'(x) = -\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

**III** Voir feuille.

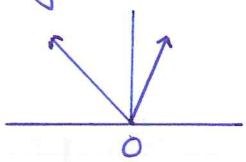
**IV** Soit $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x}$

pour $x \geqslant 0$, $t(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2$.

pour $x<0$, $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x^3}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-x}$

on a donc $\lim\limits_{0^+} t = 2$ ; $\lim\limits_{0^-} t = -1$

On déduit que f n'est pas dérivable en 0 mais que $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes en 0. L'une à gauche de coeff. dir $-1$ et l'autre à droite de coeff directeur 2.




**V** ① D'après le graphique $\mathcal{C}_f$ semble avoir 3 tangentes.

② ⓐ f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2-28x$.

$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$O \in T_a \iff -af'(a)+f(a) = 0$

$\iff -a(3a^2-28a)+a^3-14a^2-72 = 0$

$\iff -2a^3+14a^2-72 = 0 \iff a^3-7a^2+36=0$.

ⓑ pour $a=6$ : $6^3-7\times 6^2+36 = 0 \implies 6$ racine de (E).

On a alors $a^3-7a^2+36$ factorisable par $(a-6)$

Posons la division :

$$\begin{array}{r|l} a^3-7a^2+36 & a-6 \\ \underline{a^3-6a^2} \qquad\quad & a^2-a-6 \\ -a^2 \quad +36 & \\ \underline{-a^2+6a} \qquad & \\ -6a+36 & \\ \underline{-6a+36} & \\ 0 & \end{array}$$

On a alors $a^3 - 7a^2 + 36 = (a-6)(a^2 - a - 6)$

$P(a) = a^2 - a - 6$.

$\Delta = 25$ d'où $P$ admet deux racines : $a_1 = \frac{1+5}{2} = 3$

$a_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

ainsi $(E) \Longleftrightarrow (a-3)(a+2)(a-6) = 0$

$\Longleftrightarrow a = 3$ ou $a = -2$ ou $a = 6$.

On déduit que $\mathcal{C}_f$ admet 3 tangentes passant par O :
Ce sont les tangentes aux points d'abscisse $-2$ ; $3$ et $6$.

# Devoir Mathématiques $N^o$ 3 (2 heures)

**1** (8 points)

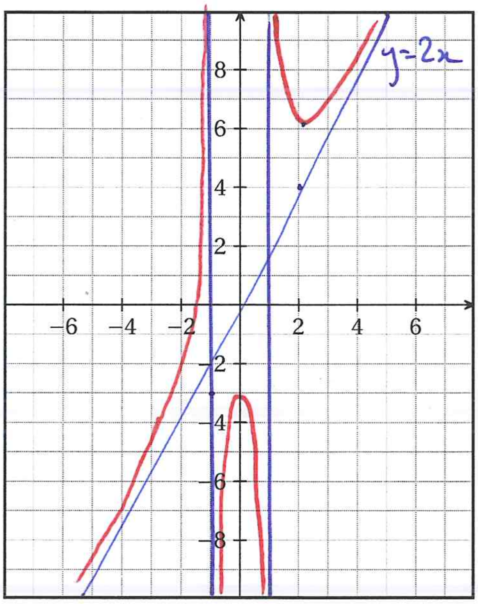
1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.
   c) Déduisez des questions précédentes le signe de $g(x)$.
2. Soit $f$ définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

   a) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D$ et en donner une interprétation géométrique.
   b) Démontrer que pour tout $x \in D$ on a

$$f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

   c) Dresser le tableau de variation de $f$.
   d) Représenter l'allure de la courbe representative de $f$ sur le graphique suivant.
   e) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.




Rq : $f(x) = 2x + \dfrac{3+2x}{x^2-1}$ $\forall x \in D$
(par division)
donc $y = 2x$ asymptote oblique.

**2** (3 points)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (x^2 + 2x - 9)^4$ ; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f_2(x) = \left(\dfrac{3x-5}{x^2+2}\right)^3$ ; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f_3(x) = \sqrt{\dfrac{3x-5}{x^2+2}}$; $\mathscr{D} = ]\frac{5}{3}; +\infty[$

$f_4(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ ; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

## 3 ______________________________________________________ (2 points)

On considère l'algorithme suivant dans lequel $f$ est une fonction numérique.

```
Algorithme 1: ????
Variables
    a,b,c et p
début
    Entrées
        Lire : a,b,c et p;
    Traitement
        tant que b − a > p faire
            c ← (a + b)/2;
            si f(a) × f(c) < 0 alors
                b←c;
            sinon
                a←c;
    Sorties
        Afficher a,b,c et p;
fin
```

1. Faire fonctionner l'algorithme avec la fonction $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$, $b = 2$ et $p = 0{,}1$. Indiquer les valeurs successives des variables $a$,$b$,$c$ dans le tableau ci-dessous.

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1,5 |
| 1 | 1,5 | 1,25 |
| 1,25 | 1,5 | 1,375 |
| 1,375 | 1,5 | 1,4375 |
| 1,375 | 1,4375 | — |
| | | |

2. Quel est l'objectif de cet algorithme ?
3. Quel est le role de $p$ ?

② L'objectif de cet algorithme est de déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude p.

③ p est la précision de l'encadrement

## 4 ______________________________________________________ (2 points)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x^3} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

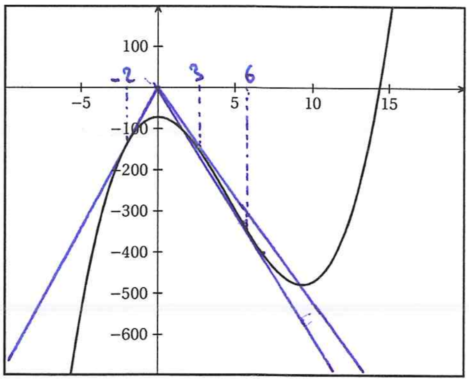
La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation géométrique.

## 5 ______________________________________________________ (5 points)

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 14x^2 - 72$$

On donne le graphe de $f$ ci-contre.




1. Conjecturer à l'aide du graphe ci-joint le nombre de tangentes passant par $O$.
2. a) Soit $T_a$ la tangente au point d'abscisse $a$. Montrer que

$$O \in T_a \iff a^3 - 7a^2 + 36 = 0 \quad (E)$$

   b) Montrer que 6 est solution de $(E)$, résoudre $(E)$ puis conclure quant à la conjecture.