DS4 (2h)

19 nov 2012

I ① $\ln(x+2) - \ln(5-2x) = \ln(x+3) \quad (E_1)$

domaine de résolution : $x > -2$; $x < 5/2$; $x > -3$

d'où $D =]-2 ; \frac{5}{2}[$

On a alors $(E_1) \iff \ln((x+2)) = \ln((x+3)(5-2x))$

$\iff (x+2) = (x+3)(5-2x)$ car $\ln$ ↗ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff 2x^2 + 2x - 13 = 0$

$\Delta = 108 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2} \in D$

ou $x = \dfrac{-1-3\sqrt{3}}{2} \notin D$

donc $S = \left\{ \dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2} \right\}$

③ $(7x-3)\ln(x+3) > 0$.

$D =]-3 ; +\infty[$. Signe de $\ln(x+3)$:

$\ln(x+3) > 0 \iff x+3 > 1$

$\iff x > -2$

d'où le tableau de signes.

	-3	-2	3/7	
$7x-3$	−	−	0	+
$\ln(x+3)$	−	0 +		+
produit	+	0 −	0	+

On a donc

$S =]-3 ; -2[\cup]3/7 ; +\infty[$

④ $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

$\iff \begin{cases} 2X^2 + X - 6 = 0 \quad (*) . \\ X = \ln x \end{cases}$

Résolution $(*)$: $\Delta = 49$; $X_1 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{3}{2}$; $X_2 = \dfrac{-1-7}{4} = -2$

d'où $(E_4) \iff \ln x = -2$ ou $\ln x = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}\ln e^3 = \ln\sqrt{e^3}$

$\iff x = e^{-2}$ ou $x = \sqrt{e^3}$

donc $S = \{\sqrt{e^3} ; e^{-2}\}$

II ① $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^4 = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^4 = +\infty$.

② $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0^+$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$.

③ $X = \ln x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{x\to 1} \ln(\ln x) = -\infty$.

$X = \ln x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Composée}} \lim \ln(\ln x) = +\infty$.

④ $f_4(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3$

$X = 3x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1 \text{ par Th} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} = 1$

et donc par produit $\lim\limits_{0} f_4 = 3$

$f_4(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{1+3x} \times \dfrac{1+3x}{x}$

$X = 1+3x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+3x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \text{ (par cc)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{1+3x} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+3x}{x} = 3$ donc par produit $\lim\limits_{+\infty} f_4 = 0$.

III

$$f_1(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad f_1'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left((x+1)(\ln x + 1) - x\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left(\ln x + x + 1\right)$$

$f_2(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$; $f_2'(x) = \frac{1}{(\cos x + 2)^2}\left((\cos x + 2)\cos x + \sin^2 x\right)$

$$f_2'(x) = \boxed{\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}}$$

$f_3(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$; $f_3'(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left((x+1) - (x-2)\right) \times \frac{3}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}$$

$$= \frac{3}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} = \boxed{\frac{3}{2(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}}$$

IV

$f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$; $x > 0$

$F_1(x) = \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x + K$ où K constante

$$= \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + x + K.$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4}$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{(3x^2+3)(x^3+3x+1)^{-4}}_{\text{de la forme } u'u^{-4}.}$$

d'où $F_2(x) = \frac{1}{3} \frac{(x^2+3x+1)^{-3}}{-3} + K$; K constante.

$$= \boxed{-\frac{1}{9} \times \frac{1}{(x^2+3x+1)^3} + K}.$$

$$f_3(x) = \sin x \, (\cos x)^4$$

$$= - \underbrace{(-\sin x)(\cos x)^4}_{\text{de la forme } u'u^4}.$$

f_3 admet pour primitive $\boxed{F_3(x) = \frac{(\cos x)^5}{5} + K \ ; \ K \in \mathbb{R}}$

V 1) $f(x) = x \ln x - 2x + 1$

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée

d'où $\lim\limits_{0} f = 1$

$f(x) = x(\ln x - 2) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 2) = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x - 2) = +\infty$

et par somme $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

② $\forall x > 0 \,;\; f'(x) = \ln x + 1 - 2$
$= \ln x - 1$

$f'(x) > 0 \iff \ln x > 1$

$\iff \ln x > \ln e \iff x > e$ car $\ln$ s $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(e) = e\ln e - 2e + 1$
$= 1 - e$

③ Sur $[e, +\infty[$.

f strictement croissante.
f continue car dérivable
$f(e) = 1-e < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
$0 \in [1-e \,; +\infty[$

Th de la bijectᵒ.
$\Longrightarrow$ il existe α unique dans $[e, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

A la calculatrice on lit $\alpha \simeq 6{,}3$

④ Soit $a > 0$.

la tangente T_a au point d'abscisse a a pour équatᵒ.

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

d'où $T_a : y = (\ln a - 1)(x-a) + a\ln a - 2a + 1$

$O \in T_a \iff 0 = (\ln a - 1)(-a) + a\ln a - 2a + 1$

$\iff -a + 1 = 0$

$\iff a = 1$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une unique tangente passant par O ; c'est la tangente T_1.

$T_1 : y = -(x-1) - 1 \iff T_1 : y = -x$

VI $f(x) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ $\qquad I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

1 $g(x) = \tan x - x$.

a Si $x \in I$; $-x \in I$ et $g(-x) = \tan(-x) + x$

$$= -\tan x + x$$
$$= -g(x)$$

donc g est impaire.

b par th $\lim\limits_{+\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g = +\infty$.

par imparité de g on déduit $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} g = -\infty$

c g dérivable et $g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1$
$$= \tan^2 x . \geq 0 \quad \forall x \in I$$

d'où g est croissante sur I.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗

d $g(0) = 0$

donc $\forall x \geq 0$; $g(x) > g(0)$ (car $g \nearrow$) $\Rightarrow g(x) > 0$.
$\forall x < 0$ $\quad g(x) < g(0)$ (car $g \nearrow$) $\Rightarrow g(x) < 0$.

d'où le tableau de signe de g :

x		0	
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) a) $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 - x^2$

$= \tan^2 x - x^2$

$= (\tan x + x)(\tan x - x)$

$= g(x) \times (\tan x + x)$.

b) pour $x \geq 0$ $\tan x \geq 0$ donc $\tan x + x \geq 0$

pour $x < 0$ $\tan x < 0$ donc $\tan x + x < 0$.

d'où le tableau de signe de $f'(x)$:

x		0	
$g(x)$	$-$	0	$+$
$\tan x + x$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

c) On déduit que f est croissante sur I.

d) $f(0) = 0$ ainsi si $x \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$.

si $x < 0$ alors $f(x) < 0$