10 déc 2012.

DS 5. Maths.

I ① $e^x = -4$; $S = \emptyset$ car $\forall x ; e^x > 0$.

② $(e^x - 3)^2 = 9 \iff |e^x - 3| = 3$

$\iff e^x - 3 = -3$ ou $e^x - 3 = +3$

$\iff e^x = 0$ ou $e^x = 6$

ou $x = \ln 6$ car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$.

$S = \{\ln 6\}$

③ $\dfrac{e^{5x+3}}{e^{x-4}} \leq e^{-1} \iff e^{4x+7} \leqslant e^{-1}$

$\iff 4x + 7 \leqslant -1$ (car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\iff x \leqslant -\frac{8}{4} \iff x \leqslant -2$

$S =]-\infty ; -2]$

④ $e^{(x^2)} \leq (e^x)^2 \iff e^{x^2} \leq e^{2x}$

$\iff x^2 \leq 2x \iff x(x-2) \leq 0$

x		0		2	
$x(x-2)$	+	0	−	0	+

$S = [0 ; 2]$

⑤ $(x+2)(2e^x - 1) \geqslant 0$.

$2e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant -\ln 2$ (car ln $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

On a le tableau de signe suivant

x		-2		$-\ln 2$	
$x+2$	−	0	+		+
$2e^x - 1$	−		−	0	+
produit	+	0	−	0	+

$S =]-\infty ; -2] \cup [-\ln 2 ; +\infty[$.

⑥ $2e^{2x} - e^{x} + 1 = 0 \iff \begin{cases} 2X^2 - X + 1 = 0 & (*) \\ X = e^x \end{cases}$

Résolut° de $(*)$: $\Delta = 9$; $X = \frac{1+3}{4} = 1$ ou $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

d'où $(E_6) \iff e^x = 1$ ou $e^x = -\frac{1}{2}$ (impossible)

$\iff x = 0$;

$S = \{0\}$.

II $f_1(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 3}$; $f_1'(x) = \dfrac{(e^x+3)2e^x - e^x(2e^x-1)}{(e^x+3)^2}$

$= \dfrac{2e^{2x} + 6e^x - 2e^{2x} + e^x}{(e^x+3)^2}$

$= \dfrac{7e^x}{(e^x+3)^2}$

$f_2(x) = e^{\frac{2x+1}{x+4}}$; $f_2'(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+4}\right)' e^{\frac{2x+1}{x+4}}$

$= \dfrac{(x+4)2 - (2x+1)}{(x+4)^2} e^{\frac{2x+1}{x+4}}$

$= \dfrac{7}{(x+4)^2} e^{\frac{2x+1}{x+4}}$.

$f_3(x) = x e^{-x^2}$; $f_3'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$

$= e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

III $g_1(x) = \dfrac{e^x}{4e^x + 3}$

$= \dfrac{1}{4} \cdot \underbrace{\dfrac{4e^x}{4e^x+3}}_{= \frac{u'}{u}}$ d'où $G_1(x) = \dfrac{1}{4} \ln|4e^x + 3| + K$; $K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow G_1(x) = \dfrac{1}{4} \ln(4e^x + 3) + K$.

$$g_2(x) = x\, e^{x}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(2x)\,e^{x^2}}_{u'e^u} \qquad \text{donc} \qquad G_2(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + K\ ;\ K \in \mathbb{R}$$

$$g_3(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$= 2 \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}}_{u'e^u} \implies G_3(x) = 2e^{\sqrt{x}} + K\ ;\ K \in \mathbb{R}.$$

IV $\quad h_1(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{5x}$

$$= \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{2}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = 2x \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X-1}{X} = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\implies} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$$

donc par produit $\lim\limits_{x\to 0} h_1 = \dfrac{2}{5}$.

$$h_2(x) = e^{(x^2)} - e^{(3x+4)}$$

$$= e^{(x^2)}\left(1 - e^{3x+4-x^2}\right).$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty \quad (\text{par composée})$$

$$\left.\begin{array}{l} X = 3x+4-x^2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+4-x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\implies} \lim_{x\to+\infty} e^{3x+4-x^2} = 0.$$

donc par somme puis par produit $\lim\limits_{+\infty} h_2 = +\infty$.

$h_3(x) = (x+1)\, e^{x+3}$

$= e^3 (x+1) e^x$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{par produit}} \lim\limits_{+\infty} h_3 = +\infty$.

$h_3(x) = e^3 x e^x + e^3 e^x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (par th)

donc par somme $\lim\limits_{-\infty} h_3 = 0$.

V $f(x) = e^{1/x}$

1) $X = \frac{1}{x}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} e^X = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{+\infty} f = 1$

de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x = 0$ donc par composée $\lim\limits_{-\infty} f = 1$

de même $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$ et donc par composée $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

de même $\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$ et donc par composée $\lim\limits_{0^-} f = 0$.

On déduit que $\Delta : y = 1$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$
et l'axe des ordonnée est asymptote verticale (à droite).

② f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}$

et $\forall x \neq 0$; $x^2 > 0$; $e^{1/x} > 0$ donc par produit $f'(x) < 0$

d'où le tableau de variat° de f :

x		0	
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow$	‖	$+\infty \searrow 1$