DS 6

I **A** On conjecture à l'aide du graphique que l'équation (E) admet deux racines : $x_1 \in]-1;0[$ et $x_2 \in]0;1[$.

B **1** **a** $x^2+x^3 = x^2(1+x)$

On a alors le tableau de signe :

x		-1		0	
x^2	$+$		$+$	0	$+$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$x^2(1+x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

b $(E) \Longleftrightarrow e^x = 3(x^2+x^3)$

Sur $]-\infty;-1]$; $e^x > 0$ et d'après le tableau de signe $x^2+x^3 < 0$

donc (E) n'admet pas de solution sur $]-\infty;-1]$

c pour $x=0$ $e^x = 1$ et $x^2+x^3 = 0$ donc 0 n'est pas solution de (E).

2 Sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$: $(E) \Longleftrightarrow e^x = 3(x^2+x^3)$

$$\Longleftrightarrow x = \ln(x^2+x^3) + \ln 3$$

$$\Longleftrightarrow x = \ln(x^2(1+x)) + \ln 3$$

$$\Longleftrightarrow x = \ln x^2 + \ln(1+x) + \ln 3$$ (car sur l'intervalle $x^2>0$; $1+x>0$)

$$\Longleftrightarrow h(x) = 0.$$

3 **a** h dérivable sur $D =]-1;+\infty[\setminus\{0\}$ et

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{1+x} - 1$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{2(1+x)+x-x(1+x)}{x(1+x)} = \frac{-x^2+2x+2}{x(1+x)}$$

b Soit $N(x) = -x^2+2x+2$.

$\Delta = 12 > 0 \Longrightarrow$ N admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{-2} = 1+\sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$

On déduit le tableau de signe de $h'(x)$ et le tableau de variation de h.

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$1+x$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$N(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(1-\sqrt{3})$	$\searrow$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$h(1+\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$

$h(1-\sqrt{3}) \simeq -0,11$

$h(1+\sqrt{3}) \simeq 1,69.$

c. Sur $]-1;0[$ h admet un maximum négatif en $1-\sqrt{3}$.

donc $\forall x \in]-1;0[$ $h(x) < 0$ donc $h(x)=0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \end{array}\right\}$ $\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{0} h = -\infty$

- $h(x) = \ln 3 + x\left(\dfrac{\ln x^2}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)$

$$= \ln 3 + x\left(2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} - 1\right) \quad \text{pour } x>0$$

et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{x} = 1$

donc par somme $\lim 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x} - 1 = -1$

et par produit $\lim\limits_{+\infty} h = -\infty$

Sur $]0\,;1+\sqrt{3}[$

h est strictement croissante
h est continue
$\lim\limits_{0} h = -\infty$; $h(1+\sqrt{3})>0$
$0 \in]-\infty\,; h(1+\sqrt{3})[$

$\Longrightarrow$ par th de la bijection l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur $]0\,; 1+\sqrt{3}[$

de même nous pouvons appliquer le th de la bijection sur $]1+\sqrt{3}\,; +\infty[$
On a alors $h(x)=0$ admet une unique solution sur $]1+\sqrt{3}\,; +\infty[$
On obtient par balayage à la calculatrice

$x \simeq 0{,}62$ pour la racine dans $]0, 1+\sqrt{3}[$
$x \simeq 7{,}12$ pour la racine dans $]1+\sqrt{3}; +\infty[$.

d) Finalement l'équation (E) admet bien deux racines mais pas dans les intervalles conjecturés. L'une dans $]0;1[$, l'autre dans $]7;8[$.

II a) $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

alors $z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

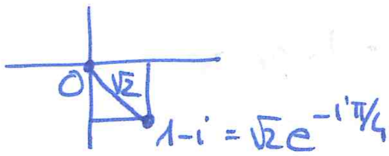
$= 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} \quad = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

b) $z^2 = 2\sqrt{2}(1-i)$

$= 2\sqrt{2}.\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

$= 4\, e^{-i\pi/4}$



c) On déduit $|z|^2 = |z^2| = 4$ donc $|z| = 2$

et $\arg(z^2) = -\pi/4 \ (2\pi)$ donc $2\arg z = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \arg z = \frac{-\pi}{8} + k\pi$

donc $\arg z = -\pi/8 \ (2\pi)$ ou $\arg(z) = \frac{7\pi}{8} \ (2\pi)$

mais on sait que $\mathrm{Re}(z) < 0$ donc $\arg z = -\frac{\pi}{8} \ (2\pi)$ est impossible

donc $\arg z = \frac{7\pi}{8} \ (2\pi)$

finalement $z = 2e^{7i\pi/8}$.

III Voir dernière page.

IV ① $a_1 = \dfrac{3+2i}{4-5i} = \dfrac{(3+2i)(4+5i)}{41} = \dfrac{1}{41}(2+23i)$

$a_2 = -3e^{3i\pi/2} + 3e^{i5\pi}$

$= 3i - 3 = -3+3i$

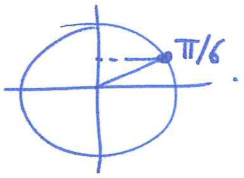
② $c_1 = 3\sqrt{3} + 3i$

$|c_1|^2 = 27 + 9 = 36 \Longrightarrow |c_1| = 6$

donc $c_1 = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$= 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 6e^{i\pi/6}$.



$c_2 = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -2e^{2i\pi/3}$

$= 2e^{i\pi}e^{i2\pi/3} = 2e^{i5\pi/3}$.

③ $3i\bar{z} + 3 = i$

$\Longleftrightarrow 3i\bar{z} = i-3 \Longleftrightarrow \bar{z} = \dfrac{i-3}{3i}$

$= \dfrac{-1-3i}{-3} = \frac{1}{3}(1+3i)$

d'où $z = \frac{1}{3}(1-3i)$ $\Longrightarrow S = \left\{\dfrac{(1-3i)}{3}\right\}$

$(E_2)\quad 2iz - \bar{z} = 2$

posons $z = x+iy$ ($x,y \in \mathbb{R}$) alors $(E_2) \iff 2i(x+iy) - (x-iy) = 2$

$\iff -x-2y + i(2x+y) = 2$

et donc par identification des parties réelles et imaginaires on a

$$\begin{cases} -x-2y = 2 \\ 2x+y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x-2y = 2 \\ -3y = 4 \quad (L_2+2L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4/3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

donc $\boxed{S = \left\{ \frac{2}{3} - \frac{4i}{3} \right\}}$.

V 1) a) $z = x+iy$

donc $Z = \dfrac{z+3}{z-i}$

$$= \frac{x+3+iy}{x+i(y-1)} = \frac{((x+3)+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{(x+3)x + y(y-1) + i(xy-(x+3)(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+3x+y^2-y + i(x+3-3y)}{x^2+(y-1)^2}$$

d'où $\mathrm{Re}\,Z = \dfrac{x^2+3x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{x+3-3y}{x^2+(y-1)^2}$

b) $M(z) \in \mathcal{E} \iff Z$ imaginaire pur et $z \neq i$ (c'est à dire $M \neq B$)

$\iff \mathrm{Re}\,Z = 0$

$\iff x^2+3x+y^2-y = 0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 0$

$\iff (x+3/2)^2 + (y-1/2)^2 = \frac{10}{4}$ avec $M \neq B$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

alors $\mathcal{E} = \mathcal{C} \setminus \{B\}$

② $M(z) \in \mathcal{E} \iff Z$ imaginaire pur

$\iff \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$ ou $Z = 0$

$\iff \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$ ou $z = z_A$

$\iff \left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$ ou $M = A$

$\iff M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ ou $M = A$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$

$\iff M \in \mathcal{C} \setminus \{B\}$.

Finalement $\mathcal{E} = \mathcal{C} \setminus \{B\}$.