DS 8

6 fev 2013

I A 1 $f(x) = x - \ln(x^2+1)$

f dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geqslant 0$$

en conséquence f est croissante sur $[0;1]$.

d'où $\forall x \in [0;1]$ on a $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1-\ln 2 \leqslant 1$$

$$\Rightarrow f(x) \in [0;1].$$

B 1 Voir graphique

2 et 3 Soit P_n la propriété $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisat$^{\circ}$: pour $n=0$; $u_0 = 1$; $u_1 = f(u_0) = 1-\ln 2 \simeq 0,3$

donc on a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$ donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

P_q vraie alors $0 \leqslant u_{q+1} \leqslant u_q \leqslant 1$

$$\Rightarrow f(0) \leqslant f(u_{q+1}) \leqslant f(u_q) \leqslant f(1) \text{ car } f \uparrow \text{ sur } [0;1]$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant u_{q+2} \leqslant u_{q+1} \leqslant 1-\ln 2 \leqslant 1$$

donc P_{q+1} vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [0,1]$ et (u_n) est décroissante

④ (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc par th
(u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

On $\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ (u_n) \text{ cvg vers } \ell \end{array}\right\}$ donc par th du point fixe $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell^2+1) = \ell \iff \ln(\ell^2+1) = 0$$
$$\iff \ell^2 + 1 = 1 \quad (\text{car } \exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+^*})$$
$$\iff \ell^2 = 0$$
$$\iff \ell = 0.$$

La suite (u_n) converge vers 0.

II 1 a

ⓑ $\left.\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

alors $a_3 = \dfrac{a_2 + a_1}{2} = \dfrac{3}{4}$;

$a_4 = \dfrac{a_3 + a_2}{2} = \dfrac{5}{8}$

$a_5 = \dfrac{a_4 + a_3}{2} = \dfrac{11}{16}$

$a_6 = \dfrac{a_5 + a_4}{2} = \dfrac{21}{32}$

ⓒ A_{n+2} est le milieu de $[A_n A_{n+1}] \Rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$

② Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 1$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Pour $n=0$; $a_{n+1} = a_1 = 1$ et $-\frac{1}{2} a_n + 1 = 1$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

P_q vraie $\Rightarrow a_{q+1} = -\frac{1}{2} a_q + 1$

$\Rightarrow 2a_{q+1} = -a_q + 2 \Rightarrow a_q = 2 - 2a_{q+1}$

On a alors d'après (1c)

$a_{q+2} = \frac{1}{2}(a_{q+1} + a_q)$

$= \frac{1}{2}(a_{q+1} + 2 - 2a_{q+1})$ d'après ce qui précède

$= \frac{1}{2}(2 - a_{q+1}) = -\frac{a_{q+1}}{2} + 1$ donc P_{q+1} vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 1$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}$

$= -\frac{1}{2} a_n + 1 - \frac{2}{3}$

$= -\frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2} v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et premier terme $v_0 = a_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

(4) On déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = v_0 q^n$

$= -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

et $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$

d'autre part $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = v_n + \frac{2}{3}$ donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}$

III ① On remarque qu'à chaque boucle, cet algorithme rajoute u à S et change u par $u/2$.

Notons $u_{n+1} = u_n/2$ avec $u_0 = 1$

alors $\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{99}}$

et (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme $u_0 = 1$

donc $\forall n \quad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

alors $S = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{99} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1-1/2} = \boxed{2\left(1-\left(1/2\right)^{100}\right)}$

② Si on part avec $I = 4$ alors $S = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^{95}$

$= \boxed{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{96}\right)}.$