Devoir n° 9

I ① $I = \int_0^1 e^{1-2x}\,dx$

$= e\int_0^1 e^{-2x}\,dx = e\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$

$= e\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right) = \frac{e}{2}(1-e^{-2})$

② $J = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \underbrace{\frac{4x^3}{x^4+1}}_{u'/u}dx$

$= \frac{1}{4}\left[\ln(x^4+1)\right]_1^2 = \frac{1}{4}(\ln 17 - \ln 2).$

③ $K = \int_0^1 \cos(2x)\,e^{\sin(2x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{2\cos(2x)\,e^{\sin(2x)}}_{\text{de la forme } u'e^u}dx$

$= \frac{1}{2}\left[e^{\sin(2x)}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(e^{\sin(2)} - 1\right)$

④ $\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3}{(3x+1)^4}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 \underbrace{3(3x+1)^{-4}}_{u'u^{-4}}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(3x+1)^{-3}}{-3}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4^3} - 1\right)$

$= -\frac{1}{9} \times \frac{-63}{64} = \frac{7}{64}$

2) a) $J = 3 - \frac{4}{e}$ (admis car par parties)

b) d'après (1) $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

donc $\frac{x^2}{e} \leq x^2 f(x) \leq \frac{x^2}{2}$

d'où par intégrat° de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e}\,dx \leq K \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \leq K \leq \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}}.$$

c) $J + K = \int_0^1 e^{-x}\left((2+x) + \frac{x^2}{2-x}\right)dx$ par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^1 e^{-x}\left(\frac{(2+x)(2-x) + x^2}{2-x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} \times \frac{4}{2-x}\,dx = 4L.$$

d) On a d'après ce qui précède

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3e} + 3 - \frac{4}{e} \leq J + K \leq \frac{1}{6} + 3 - \frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3e} + 3 - \frac{4}{e}\right) \leq L \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} + 3 - \frac{4}{e}\right) \text{ car } 4L = J + K$$

II ① $\forall X \in [0, \pi/2]$, $\sin X \geqslant 0$ et $\sin X \leqslant 1$

donc en prenant $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on a $2x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ d'où

$$0 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant x^n \sin(2x) \leqslant x^n$$ car $x^n \geqslant 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

et donc par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi/4} x^n dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}.$$

② $\left|\frac{\pi}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$ d'où par th des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0}.$$

III ① $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2-x}$.

f dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}\left((2-x)(-e^{-x}) + e^{-x}\right)$

$$= \frac{e^{-x}}{(2-x)^2}(x-1)$$

Sur $[0,1]$; $\dfrac{e^{-x}}{(2-x)^2} \geqslant 0$ et $(x-1) \leqslant 0$ d'où $f'(x) < 0$ sur $[0,1]$

donc f est décroissante sur $[0,1]$

d'où $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \geqslant f(x) \geqslant e^{-1}}$$