DS 11.

I **1** **a** $A(-2,0,1)$; $B(1,2,-1)$; $C(-2,2,2)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{AB}.\vec{AC}=2$

$AB^2=9+4+4=17 \Rightarrow AB=\sqrt{17}$

$AC^2=4+1=5 \Rightarrow AC=\sqrt{5}$

b par th $\vec{AB}.\vec{AC}=AB.AC\cos(\vec{AB},\vec{AC})$

d'où $\cos(\vec{AB},\vec{AC})=\dfrac{\vec{AB}.\vec{AC}}{AB.AC}=\dfrac{2}{\sqrt{17}.\sqrt{5}}$ d'où $\widehat{BAC}\simeq 77^\circ$.

c On déduit donc que A,B,C non alignés (sinon $\widehat{BAC}=0^\circ$ ou $\widehat{BAC}=180^\circ$)

2 Soit $\mathcal{P}: 2x-y+2z+2=0$.

$2x_A-y_A+2z_A+2=-4+2+2=0 \Rightarrow A\in\mathcal{P}$

$2x_B-y_B+2z_B+2=0 \Rightarrow B\in\mathcal{P}$

$2x_C-y_C+z_C+2=0 \Rightarrow C\in\mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}=(ABC) \Rightarrow (ABC): 2x-y+2z+2=0$.

3 $\mathcal{P}_1: x+y-3z+3=0$; $\mathcal{P}_2: x-2y+6z=0$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ les vecteurs orthogonaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

on a $x_{\vec{n_1}}=x_{\vec{n_2}}$ et $y_{\vec{n_1}}=-\frac{1}{2}y_{\vec{n_2}}$ donc $\vec{n_1},\vec{n_2}$ non colinéaires

$\Rightarrow \mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ non parallèles donc sécants.

Soit $M(x,y,z)\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-3z+3=0\\x-2y+6z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3t-3\\x-2y=-6t\\z=t\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3t-3\\y=\frac{1}{3}(9t-3) & L_1-L_2\\z=t\end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=-2\\y=3t-1 \quad ; \quad t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}}$

$M(x,y,z) \in (ABC) \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} 2x - y + 2z + 2 = 0 \\ x = -2 ; y = 3t - 1 ; z = t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2 ; y = 3t - 1 ; z = t \\ -4 - (3t-1) + 2t + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 ; y = -4 ; z = -1 \end{cases}$

Le point d'intersection est le point $M(-2, -4, -1)$.

(b) $M(x,y,z) \in \mathcal{S}(\Omega, 3) \iff \Omega M^2 = 9$ $\quad \vec{\Omega M}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$\iff (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$

$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x = -2 ; y = 3t - 1 ; z = t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (-3)^2 + (3t+4)^2 + (t-1)^2 = 9 \\ x = -2 ; y = 3t - 1 ; z = t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (3t+4)^2 + (t-1)^2 = 0 \quad (*) \\ x = -2 ; y = 3t - 1 ; z = t \end{cases}$

$(*)$ est impossible car il s'agit d'une somme de deux carrés (donc positifs ou nuls) et ils sont non nuls simultanément.

(c) il nous faut dist((ABC) ; Ω).

Cherchons l'eq de $\Delta \perp (ABC)$ avec $\Omega \in \Delta$.

Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}_{(ABC)}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\Delta : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

Cherchons le point d'intersect° de Δ et (ABC)

$M(x,y,z) \in \Delta \cap (ABC) \iff \begin{cases} x = 2t+1 ; y = -t - 3 ; z = 2t + 1 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

$\iff 4t + 2 + t + 3 + 4t + 2 + 2 = 0 \iff 9t = -9 \iff t = -1$

Donc $P(-1 ; -2 ; -1)$ point d'intersect° de Δ et (ABC).

$\Rightarrow \text{dist}((ABC), \Omega) = \|\vec{\Omega P}\| = \sqrt{9} = 3$ car $\vec{\Omega P}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega P^2 = 9$

ainsi (ABC) est tangent à $\mathcal{S}$.

II 1) $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ vect dir de $\mathcal{D}$; $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ vect . dir de $\mathcal{D}'$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{w}.\vec{u} = 1-1=0\\ \vec{w}.\vec{u'} = -1+1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{w}\perp\vec{u} \text{ et } \vec{w}\perp\vec{u'}$$

$\Rightarrow$ $\vec{w}$ est bien vecteur dir de Δ.

2) a) $\mathcal{P}$ plan contenant $\mathcal{D}$ et Δ

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ est dirigé par $\vec{u}_{\mathcal{D}} = \vec{u}$ et $\vec{u}_{\Delta} = \vec{w}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$; $\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\vec{u} = 3-6+3=0\\ \vec{n}.\vec{w} = 3-3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{w}$

Donc $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.

b) Il résulte $\mathcal{P}: 3x+2y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

mais $A(3,-4,1)\in\mathcal{D}\subset\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $9-8+3+d=0$

$\Rightarrow$ $d=-4$ d'où $\mathcal{P}: 3x+2y+3z-4=0.$

3) a) $H'\in\mathcal{D}'$ $\Rightarrow$ il existe t tel que $H'(-1-t, 2+t, 1-t)$

d'autre part $H'\in\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $3(-1-t)+2(2+t)+3(1-t)-4=0$

$\Rightarrow -3-3t+4+2t+3-3t-4=0 \Leftrightarrow -4t=0$

d'où $H'(-1,2,1)$.

b) On déduit ainsi $\boxed{\Delta: \begin{cases} x=-1+t\\ y=2\\ z=1-t\end{cases}}$ car $H'\in\Delta$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ vect .dir de Δ

4) a) $H(x,y,z)\in\Delta\cap\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+t,\ y=2,\ z=1-t\\ x=3+t',\ y=-4-3t',\ z=1+t'\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1+t=3+t'\\ 2=-4+3t'\\ 1-t=1+t'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-t'=4 \text{ ok.}\\ t'=2\\ t=-2\end{cases}$$

On a alors $H(1,2,-1)$

(b) $\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow HH'^2 = 8 \Rightarrow HH' = 2\sqrt{2}$

(5a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}$$

$$= \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$$

notons $\vec{v} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$ alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{HH'} + \vec{v}$

$\overrightarrow{HH'}$ colinéaire à $\vec{w}$ car vecteur directeur de Δ.

et $\vec{v}.\vec{w} = \overrightarrow{MH}.\vec{w} + \overrightarrow{H'M'}.\vec{w}$

$= 0 + 0$ car $\overrightarrow{MH}$ vect dir de D et $\overrightarrow{H'M'}$ vect dir de D' et $\Delta \perp D$, $\Delta \perp D'$

$= 0$

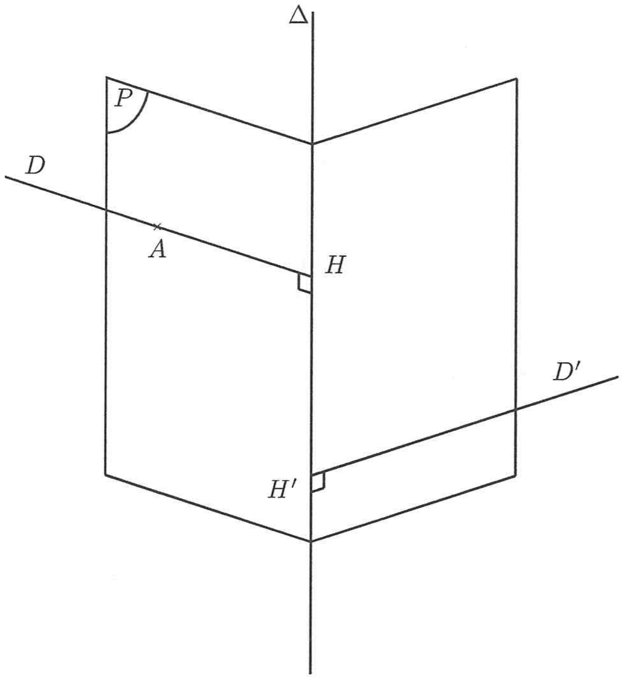
donc $\overrightarrow{MM'}$ est bien la somme d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$ et de $\overrightarrow{HH'}$

(b) $MM'^2 = (\overrightarrow{HH'} + \vec{v})^2$

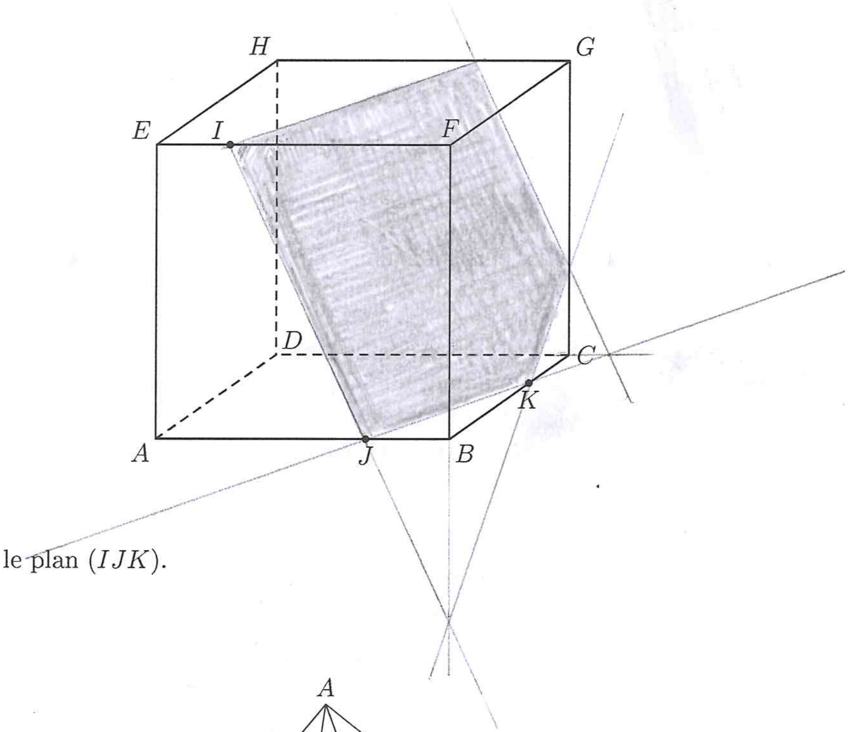
$$= \overrightarrow{HH'}^2 + \underbrace{2\overrightarrow{HH'}.\vec{v}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \overrightarrow{HH'} \perp \vec{v}}} + \vec{v}^2 = HH'^2 + \|\vec{v}\|^2 \geqslant HH'^2$$

car $\|\vec{v}\|^2 \geqslant 0$

ainsi $MM'^2 \geqslant HH'^2 \Rightarrow MM' \geqslant HH'$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$.



3 Tracer la section par le plan (IJK).



4 Tracer la section par le plan (IJK).