

Devoir Mathématiques N^o 11 (1h)

1 L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(-2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; -1) et C(-2 ; 2 ; 2).

1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
 b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle \widehat{BAC} .
 c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient \mathcal{P}_1 , et \mathcal{P}_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
 Montrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants selon une droite \mathcal{D} dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
4. Démontrer que la droite \mathcal{D} et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit \mathcal{S} la sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$. *Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
 - a) Étudier l'intersection de la sphère \mathcal{S} et de la droite \mathcal{D} .
 - b) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère \mathcal{S} .

2 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite D passant par le point A de coordonnées (3 ; -4 ; 1) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1 ; -3 ; 1)$.

On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D' . On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D' , distance qui sera définie à la question 5.

On note H le point d'intersection des droites D et Δ , H' le point d'intersection des droites D' et Δ . On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ . On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H' . Une figure est donnée en annexe.

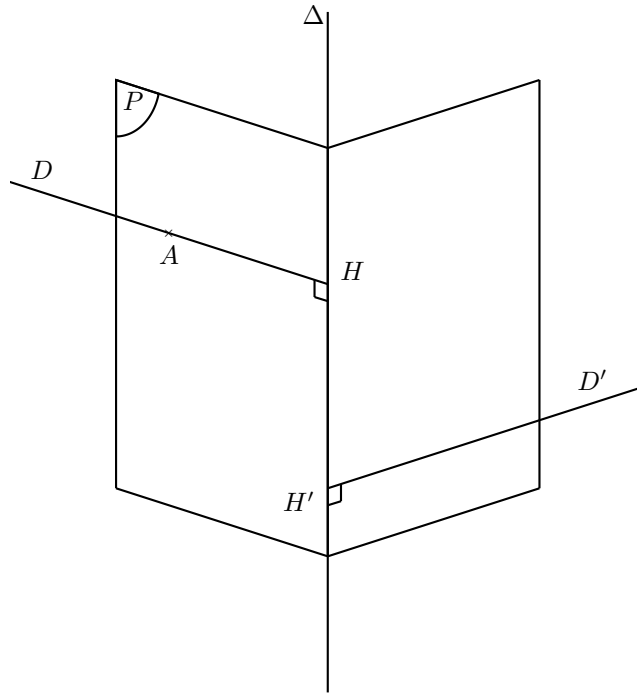
1. On considère le vecteur \vec{w} de coordonnées (1 ; 0 ; -1). Démontrer que \vec{w} est un vecteur directeur de la droite Δ .
2. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées (3 ; 2 ; 3).
 - a) Démontrer que le vecteur \vec{n} est normal au plan P .
 - b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.
3. a) Démontrer que le point H' a pour coordonnées (-1 ; 2 ; 1).
 b) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ .
4. a) Déterminer les coordonnées du point H .
 b) Calculer la longueur HH' .
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D' , $MM' \geq HH'$.

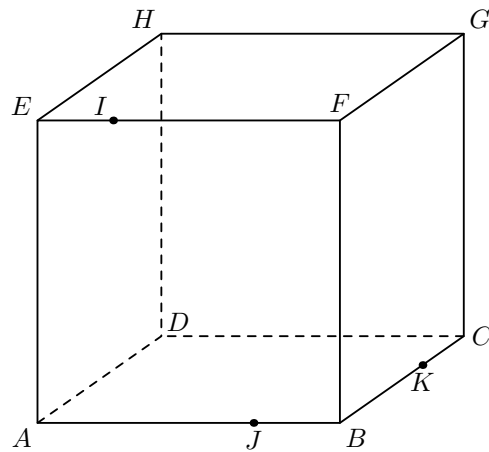
a) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

b) En déduire que $\|\overrightarrow{MM'}\|^2 \geq \|\overrightarrow{HH'}\|^2$ et conclure.

La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre un point de D et un point de D' . On l'appelle distance entre les droites D et D' .



3 Tracer la section par le plan (IJK) .



4 Tracer la section par le plan (IJK) .

