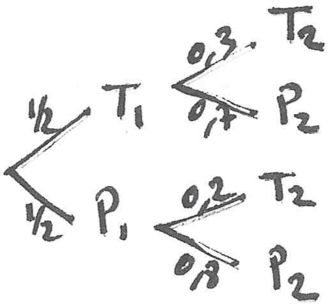
DS 13

6 mai 2013.

I 1 a) La situation se modélise par l'arbre suivant

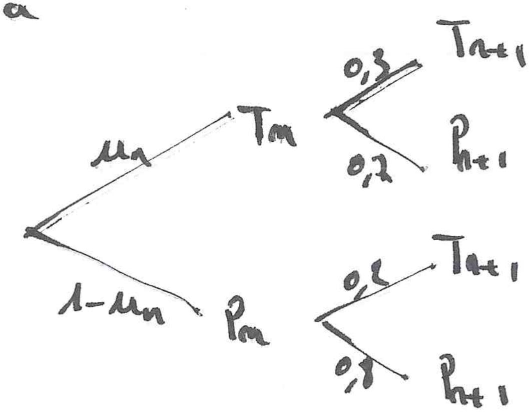


D'après les données de l'énoncé : $\boxed{\begin{array}{l} P(T_1) = P(P_1) = \frac{1}{2} \\ P_{T_1}(T_2) = 0{,}3 \\ P_{P_1}(T_2) = 1 - P_{P_1}(P_2) = 0{,}2. \end{array}}$

b) D'après la formule des probabilités totales

$$P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(P_1 \cap T_2)$$
$$= P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(P_1) \times P_{P_1}(T_2)$$
$$= 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

c) On a



d) D'après les règles d'utilisation de l'arbre :

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(T_{n+1})$$
$$= u_n \times 0{,}3 + (1 - u_n) \times 0{,}2$$
$$= 0{,}1 u_n + 0{,}2$$

② ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9}$

$$= 0{,}1u_n + 0{,}2 - \frac{2}{9}$$

$$= \frac{1}{10}\left(u_n + 2 - \frac{20}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10} v_n$$

d'où (v_n) suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{9}$$

$$= \frac{5}{18}.$$

ⓑ Par théorème on déduit $\forall n \neq 0$, $v_n = v_1 q^{n-1}$

$$= \frac{5}{18} \times \frac{1}{10^{n-1}}$$

on a alors $\forall n \neq$ $u_n = v_n + \frac{2}{9}$

c'est-à-dire $u_n = \frac{5}{18} \times \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{2}{9}$.

ⓒ $\left|\frac{1}{10}\right| < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$

on déduit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

c'est bien cohérent avec la conjecture.

Ⅱ ① $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

D'après l'énoncé $P(X \leqslant 7) = 0{,}6$

d'où $1 - e^{-\lambda 7} = 0{,}6$

$\iff e^{-7\lambda} = 0{,}4$

$\iff -7\lambda = \ln 0{,}4$

$\iff \lambda = -\frac{\ln 0{,}4}{7} \simeq 0{,}131$ à 10^{-3}.

② Par th $P(X \geq 5) = e^{-5\lambda} \simeq 0{,}52$.

③ $P_{X \geq 4}(X \geq 9) = P(X \geq 5)$ car X loi exp $\Rightarrow$ X loi de durée de vie sans vieillissement

$\simeq 0{,}52$.

④ $P(X \in [6, 10]) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$

$\simeq 0{,}186 \simeq 0{,}19$ (à 10^{-2})

⑤ ⓐ. On a une expérience de Bernoulli qui consiste à relever un temps et dont la probabilité de succès est $P(X \geq 5) \simeq 0{,}52$.

. On répète 8 fois cette expérience de manière indépendante.

. Par th la variable Y comptant le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $8, 0{,}52$.

$Y \sim \mathcal{B}(8, 0{,}52)$.

ⓑ $P(Y=3) = \binom{8}{3} 0{,}52^3 \, 0{,}48^5 \simeq 0{,}02$.

ⓒ Par th $E(Y) = np = 8 \times 0{,}52 = 4{,}16 \simeq 4$ h.