Classe de $T^{ale}S3$ — 7 octobre 2013

Devoir Mathématiques N^o 2 (1 heure)

1 ——— (15 points)

$$f_1(x) = \frac{x-4}{-x^2+x+2} \text{ en } 2^+ \text{ et en } +\infty.$$

$$f_2(x) = \frac{3x-x^2}{|x-3|} \text{ en } -\infty \text{ et en } +3 .$$

$$f_3(x) = \frac{x^2\sqrt{x}-3x}{3x^2-3x+4}; \quad \text{en } +\infty.$$

$$f_4(x) = \left(7x^2+4x-\frac{32}{(x-1)^2}\right)^{21}; \quad \text{en } 1.$$

$$f_5(x) = x^7+4x^2+3\pi; \quad \text{en } -\infty.$$

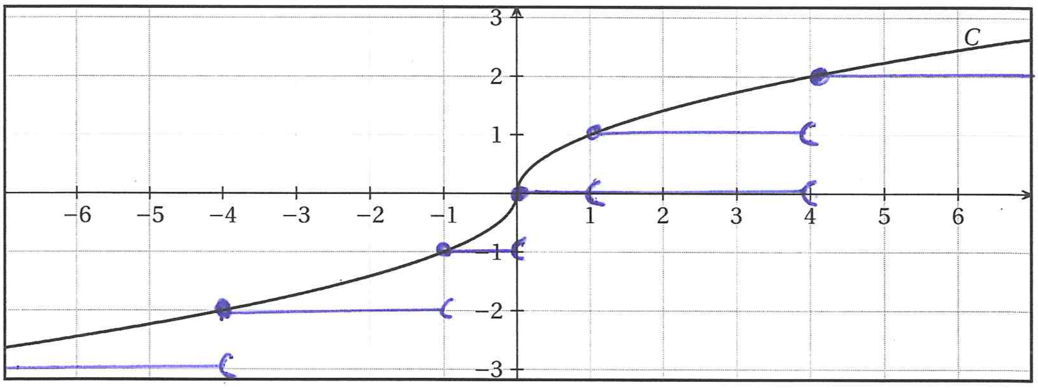
$$f_6(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}; \quad \text{en } 1$$

$$f_7(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2-2x-3}; \quad \text{en } 3$$

$$f_8(x) = \frac{\cos(x)+x}{x^3+2}; \quad \text{en } -\infty$$

2 ——— (2 point)

On considère la fonction f dont la représentation graphique figure ci-dessous. Soit E la fonction partie entière. Representer graphiquement la fonction $E(f)$ de manière sommaire sur le graphique suivant. On ne demande aucune justification.



3 ——— (3 point)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 3$

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f, étudiez son signe et dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
2. Montrer que f admet une unique racine α dans l'intervalle $[0;3]$ et en déterminer une valeur approchée à 10^{-2}.

15 - 7 oct 2013

Devoir N°2.

I

1

$$f_1(x) = \frac{x-4}{-x^2+x+2}.$$

$$-x^2+x+2 = (x-2)(-x-1)$$
$$= (2-x)(x+1)$$

d'où

x		-1		2	
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ainsi $\lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+x+2) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to 2} x-4 = -2$

$\Big\}$ par quotient $\Longrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{2^+} f_1 = +\infty}$

d'après la règle du plus haut degré $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2} = 0.}$

2 $f_2(x) = \dfrac{3x-x^2}{|x-3|} = \begin{cases} \dfrac{3x-x^2}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \\[2ex] \dfrac{3x-x^2}{3-x} & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{x(3-x)}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \\[2ex] \dfrac{x(3-x)}{3-x} & \text{si } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x \geq 3 \\ x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

ainsi $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty}$

et $\boxed{\lim\limits_{3^+} f_2 = \lim\limits_{x\to 3^+} -x = -3 \;;\; \lim\limits_{3^-} f_2 = \lim\limits_{x\to 3} +x = +3}$

3 $f_3(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x} - 3x}{3x^2 - 3x + 4}$

$$= \frac{x^2\sqrt{x}\left(1 - 3/x\sqrt{x}\right)}{x^2\left(3 - 3/x + 4/x^2\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1 - 3/x\sqrt{x}\right)}{3 - 3/x + 4/x^2}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 3/x\sqrt{x}\right) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 - 3/x + 4/x^2\right) = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc par produit et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f_3(x) = +\infty}$

④ $f_4(x) = \left(7x^2+4x-\dfrac{32}{(x-1)^2}\right)^{21}$ en 1.

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0^+$ car $\forall x \quad (x-1)^2 \geqslant 0$

d'où $\lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{32}{(x-1)^2} = -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} X = 7x^2+4x-\dfrac{32}{(x-1)^2} \\ \lim\limits_{x\to 1} 7x^2+4x-\dfrac{32}{(x-1)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} X^{21} = -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{1} f_4 = -\infty}$$

⑤ $f_5(x) = x^7+4x^2+3\pi$

par th du plus haut degré : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f_5 = \lim\limits_{x\to -\infty} x^7 = -\infty.}$

⑥ $f_6(x) = \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

$$= \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \times \frac{\overbrace{x^2-1}^{=(x+1)(x-1)}}{x-1} = \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \times (x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} X = x^2-1 \\ \lim\limits_{x\to 1} x^2-1 = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Donc par produit $\lim\limits_{x\to 1} \boxed{f_6(x) = 2.}$

(7) $f_7(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{x^2-2x-3}$

$$= \frac{(x-3)(-3x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1-3x}{x+1}$$

d'où $\boxed{\lim_{3} f_7 = \dfrac{1-9}{4} = -2}$.

(8) $f_8(x) = \dfrac{\cos x + x}{x^3+2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

avec $x^3+2<0$
car x tend vers $-\infty$

$$x-1 \leq \cos x + x \leq 1+x.$$

$$\frac{x-1}{x^3+2} \geq f_8(x) \geq \frac{1+x}{x^3+2}$$

par th du plus haut degré : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^3+2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1+x}{x^3+2} = 0$.

Donc d'après le th des gendarmes $\boxed{\lim_{-\infty} f_8 = 0}$

(III) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 3$.

f dérivable et $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x$

$= 12x(x^2-2x-3)$

Racines de (x^2-2x-3) :

$\Delta = 4+12 = 16$ donc on a 2 racines : $x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$

d'où $f'(x) = 12x(x-3)(x+1)$

On peut en déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations :

x		-1		0		3	
$12x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-132	$\nearrow$ $+\infty$

$f(-1) = -4$

$f(0) = 3$

$f(3) = -132$

D'après la règle du plus haut degré

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

(2) Sur $[0;3]$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est strictement décroissante.} \\ f \text{ est continue (car dérivable)} \\ f(0)=3 \ ; \ f(3)= \\ 0 \in \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Donc d'après le th de la bijection, il existe $\alpha \in [0,3]$ unique tel que $f(\alpha)=0$

On obtient par balayage à la calculatrice : $f(0,38)>0$

$f(0,39)<0$

donc $\alpha \simeq 0,38$ à 10^{-2} par défaut.