6 nov 2013.

Devoir N°4

I $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$; $I = \mathbb{R}$

alors $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{15}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3}{7}\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{18}x^6 + \frac{15}{8}x^4 + \frac{3}{14}x^2 + \frac{x}{2} + K}$$

$g(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$; $I = \{x > \frac{1}{3}\}$.

$g(x) = (3x+3)(x^2+2x)^{-1/2}$.

$= \frac{3}{2}(2x+2)(x^2+2x)^{-1/2}$ (de la forme $u'u^{-1/2}$)

$G(x) = \frac{3}{2}\frac{(x^2+2x)^{1/2}}{1/2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

d'où $\boxed{G(x) = 3\sqrt{x^2+2x} + K}$.

$h(x) = \underbrace{(2x+1)(x^2+x-7)}_{\text{de la forme } u'u.}$; $I = \mathbb{R}$.

donc $\boxed{H(x) = \frac{1}{2}(x^2+x-7)^2 + K \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}}$

II ① $f(x) = \cos^3 x$

$= \cos x \times \cos^2(x)$

$= \cos x \times (1 - \sin^2 x)$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$= \cos x - \cos x \sin^2 x$.

② On a $f(x) = \cos x - \underbrace{\cos x \sin^2 x}_{u' u^2}$

d'où $F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

mais $F(\pi/2) = 0$

$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3 \pi/2 + K = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} + K = 0$

$\Leftrightarrow K = -\frac{2}{3}$

d'où $\boxed{F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{2}{3}}$.

III $f(x) = \dfrac{3x + 2\sin x}{x+2}$

① $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

② $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

$\Rightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \qquad (\times 2 \text{ avec } 2 > 0)$

$\Rightarrow 3x - 2 \leq 3x + 2\sin x \leq 3x + 2. \qquad (*)$

- si $x > -2$ alors $x+2 > 0$ et donc en divisant $(*)$ par $(x+2)$

on a $\dfrac{3x-2}{x+2} \leq f(x) \leq \dfrac{3x+2}{x+2}$

- si $x < -2$ alors $x+2 < 0$ et donc en divisant $(*)$ par $x+2$

on a $\dfrac{3x-2}{x+2} \geq f(x) \geq \dfrac{3x+2}{x+2}$

③ $\forall x > -2$; $\dfrac{3x-2}{x+2} \leq f(x) \leq \dfrac{3x+2}{x+2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{x+2} = 3$ par th du plus haut degré.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{x+2} = 3$ -- - - - - -- -

Donc d'après le th des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 3.}$

De même, $\forall x < -2$ $\dfrac{3x-2}{x+2} \geq f(x) \geq \dfrac{3x+2}{x+2}$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-2}{x+2} = 3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+2}{x+2} = 3$

Donc $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = 3}$ d'après le th des gendarmes.

Il reste la limite en -2 :

$\lim\limits_{x \to -2} (3x + 2\sin x) = -6 + 2\sin(-2) < 0$

x		-2	
$x+2$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x \to -2^+} (x+2) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to -2^-} (x+2) = 0^-$

On déduit par quotient $\boxed{\lim\limits_{-2^+} f = -\infty \text{ et } \lim\limits_{-2^-} f = +\infty}$

IV Soit $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{4x}$ $\forall x \neq 0$

$= \dfrac{3}{4} \times \dfrac{\sin 3x}{3x}$.

$X = 3x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\}$ par composée $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$

Donc par produit, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{4x} = \dfrac{3}{4}$

V ① ⓐ $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ $\quad D =]-1, +\infty[$

P dérivable sur D et $P'(x) = 6x^2 - 6x$

$= 6x(x-1)$

On déduit le signe de P' et les variations de P.

x	-1		0		1	α	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$
$P(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	0	$\nearrow +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$ par th.

ⓑ Sur $]-1;1]$ le maximum de P est -1 atteint en 0

donc $P(x)=0$ n'a pas de solution.

Sur $[1, +\infty[$;

$\left.\begin{array}{l} P \text{ est strictement croissant} \\ P \text{ est continue (car polynôme)} \\ P(1) = -2 ;\ \lim\limits_{+\infty} P = +\infty \\ 0 \in [-2; +\infty[\end{array}\right\}$ donc par th de la bijection il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ unique tel que $P(\alpha) = 0$.

de plus $\left.\begin{array}{l} P(1) = -2 < 0 \\ P(2) = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in]1;2[$.

Conclusion : sur $]-1,1]$ pas de solut° et sur $[1, +\infty[$ une solut° unique.

donc sur D, $P(x)=0$ admet une solut° unique.

ⓒ Sur $]-1;1]$, -1 maximum de P de $P(x) < 0$.

Sur $[1, +\infty[$ P est croissante donc

- pour $1 \leq x \leq \alpha$ on a $P(x) \leq P(\alpha)$

$\Rightarrow P(x) \leq 0$.

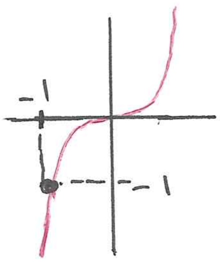
- pour $x \geq \alpha$ on a $P(x) \geq P(\alpha) \Rightarrow P(x) \geq 0$.

finalement :

x	-1		α		$+\infty$
$P(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

② $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$; $x \in D$.

. par th, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{x^3} = 0$. donc la droite d'éq $y=0$ est asymptote horizontale à C_f



$x \longmapsto x^3$ est strictement croissante donc pour $x > -1$; $x^3 > (-1)^3$

et donc $x^3 > -1 \Rightarrow x^3+1>0$

finalement $\lim\limits_{x \to -1} 1+x^3 = 0^+$

et $\lim\limits_{x \to -1} (1-x) = 2$

donc par quotient $\lim\limits_{-1} f = +\infty$

donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à C_f

(b) f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D : \quad f'(x) = \frac{(1+x^3)\times(-1) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$$

$\forall x \in D$, $(1+x^3)^2 > 0$ donc f' et P ont même signe.

(c) On déduit le tableau de variation de f :

x	-1		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

(3) $P(\alpha) = 0 \iff 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$

$$\iff \alpha^3 = \frac{3\alpha^2 + 1}{2}$$

alors $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha^3}$

$$= \frac{1-\alpha}{1 + \frac{3\alpha^2+1}{2}} = \frac{(1-\alpha)\times 2}{3\alpha^2+3} = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$$

cqfd.

VI ① On conjecture que $\mathcal{C}$ admet deux tangentes passant par P.

② par th : $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

ici $f'(x) = 2x$; $f(x) = x^2$

alors $T_a : y = 2a(x-a) + a^2$

donc $\underline{T_a : y = 2ax - a^2}$ $(*)$

$P(2;3) \in T_a \iff 3 = 2a \times 2 - a^2$

$\iff 3 = 4a - a^2$

$\iff a^2 - 4a + 3 = 0$.

③ $P \in T_a \iff a^2 - 4a + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ d'où $a = \frac{4+2}{2} = 3$ ou $a = \frac{4-2}{2} = 1$

$\mathcal{C}$ admet deux tangentes passant par P : T_1 et T_3.

$T_1 : y = 2x - 1$ (d'après $(*)$)

$T_3 : y = 6x - 9$ - - - - - -

VII

Voici le dessin de la tortue

VIII (E_1) : $\ln(x+3) = 2\ln(x+1)$

le domaine est $D =]-1; +\infty[$

alors $(E_1) \Leftrightarrow \ln(x+3) = \ln((x+1)^2)$

$\Leftrightarrow x+3 = (x+1)^2$ car $\ln$ s↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = +9 \Rightarrow x = \frac{-1+3}{2} = 1 \in D$.

ou $x = \frac{-1-3}{2} = -2 \notin D$.

d'où $S = \{1\}$.

(E_2) : $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \leq 0$; on a D

il faut $5-x > 0$ et $x-1 > 0$

$x < 5$ et $x > 1$ donc $D =]1; 5[$

alors $(E_2) \Leftrightarrow \ln(5-x)(x-1) \leq \ln 3$

$\Leftrightarrow (5-x)(x-1) \leq 3$ car $\ln$ s↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

$\Delta = 4$ donc $x = \frac{6+2}{2} = 4$ ou $x = \frac{6-2}{2} = 2$ racines.

x		2		4	
x^2-6x+8	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $S =]1; 2] \cup [4; 5[$ (sur D).

$(E_3) : \quad 2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad ; \quad D = \mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ 2X^2 + X - 6 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$(*) : \quad 2X^2 + X - 6 = 0$

$\Delta = 49 \quad ; \quad X = \frac{-1-7}{4} = -2 \quad$ ou $\quad X = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

finalement $\quad (E_3) \Leftrightarrow \ln x = -2 \quad$ ou $\quad \ln x = +\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x = e^{-2} \quad$ ou $\quad x = e^{+3/2} = \sqrt{e^3}$

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{e^3} ; \frac{1}{e^2}\right\}}.$$

IX $\quad f(x) = \frac{4}{1-3x} \quad ; \quad x > \frac{1}{3}$

$$= -\frac{4}{3} \times \underbrace{\frac{-3}{1-3x}}_{\frac{u'}{u}}$$

donc $\quad F(x) = -\frac{4}{3} \ln|1-3x| + K \quad$ avec $\quad x > \frac{1}{3}$

$= -\frac{4}{3} \ln(3x-1) + K \quad$ (car si $x > \frac{1}{3}$; $1-3x < 0$)