25 nov 2013

DS 5

I **1** **a** On lit $f(1)=2$

$f'(1)$ est le coeff directeur de la tangente au point d'abscisse 1

donc $f'(1)=0$.

b on a $f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}$; $x>0$.

f dérivable et $f'(x)=\frac{x(b/x)-(a+b\ln x)}{x^2}$

$$=\frac{1}{x^2}(b-a-b\ln x)$$

$$=\frac{1}{x^2}((b-a)-b\ln x)$$

c

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b\ln 1=2 \\ (b-a)-b\ln 1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b-a=0. \end{cases}$$

d'où $a=2$; $b=2$.

2 **a** On a donc $f'(x)=\frac{1}{x^2}\times(-2\ln x)$

$$=\frac{-2\ln x}{x^2}$$

d'où comme $x^2>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on déduit $f'(x)$ du même signe que $-\ln x$.

b $\forall x>0$; $f(x)=\frac{2+2\ln x}{x}$

$$=\frac{2}{x}+2\cdot\frac{\ln x}{x}.$$

• $\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée

Donc par somme $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0.}$

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 2+2\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow$ par quotient $\boxed{\lim\limits_{0} f = -\infty.}$

ⓒ On déduit le tableau de variation de f

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

• Signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0 \iff -\ln x > 0$

$\iff \ln x < 0$

$\iff x < 1$

• $f(1) = \frac{2+2\ln 1}{1} = 2$

③ ⓐ . la f° f est continue sur $]0,1]$

. la f° f est s↗ sur $]0,1]$

. $\lim\limits_{0} f = -\infty$; $f(1) = 2$ et $1 \in]-\infty ; 2]$

} donc d'après le th de la bijectᵒ

$\boxed{\text{il existe } \alpha \in]0,1] \text{ unique tel que } f(\alpha) = 1.}$

ⓑ Par lecture sur le tableau de variation, $\exists \beta \in [1, +\infty[$ telle que $f(\beta) = 1$.

Par balayage à la calculatrice : $\boxed{5 < \beta < 6.}$

4) a) voir sujet

b) C'est un algorithme de dichotomie qui détermine un encadrement à 10^{-1} de la valeur α

Il fonctionne car on sait que f ↗ sur $]0,1]$

c) Nouvel algo.

```
a ← 5
b ← 6
tant que b−a > 0,1
      m ← ½(a+b)
      si f(m) < 1 alors b ← m
                  sinon a ← m
   Fin si
Fin tant que
```

ici $f \searrow$

II) (E_1) $e^x = -4$ impossible $\boxed{S = \emptyset}$

(E_2) : $(x+2)(2e^x - 1) \geqslant 0$.

$2e^{x} - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff x \geqslant -\ln 2$ car $\ln$ ↗ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où le tableau de signe

x		-2		$-\ln 2$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$2e^x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\boxed{S =]-\infty ; -2] \cup [-\ln 2 ; +\infty[}$$

(E_3) : $2e^{2x} - e^x + 1 = 0 \iff \begin{cases} X = e^x \\ 2X^2 - X + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Résolut° de (*)

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ donc $(*)$ n'a pas de Solution

D'où (E_3) n'a pas de Solution : $S = \emptyset$

III

$$f_1'(x) = \frac{(e^x+3)(2e^x) - (2e^x-1)e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x}+6e^x-2e^{2x}+e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{7e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$f_2(x) = x e^{-x^2}$$

$$f_2'(x) = e^{-x^2} - x \times 2x e^{-x^2} = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2}(1-2x^2)$$

IV

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \quad \text{en } 0$$

$$= \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$X = \sin x$

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

$\lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$\xrightarrow{\text{Composée}}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc par produit $\boxed{\lim_0 f_1 = 1}$

$$f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ par composée et croissance comparée

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{x} = 1$ par th

$\Longrightarrow$ par produit $\boxed{\lim_{+\infty} f_2 = 0}$