Devoir N° 6 . 16 déc 2013

I A- voir figure

B 1 a) Ta tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ a pour coeff dir $f'(a) = e^a$

b) Δ_b tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $B(b, g(b))$ a pour coeff dir $g'(b) = e^{-b}$

c) la tangente est commune donc

$$f'(a) = g'(b) \iff e^a = e^{-b} \iff a = -b$$ car exp strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

2) $\mathcal{D} : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc l'ordonnée à l'origine est $-af'(a) + f(a)$

d'autre part $\mathcal{D} : y = g'(b)(x-b) + g(b)$ donc l'ordonnée à l'origine est $-bg'(b) + g(b)$

On a donc $-b\,g'(b) + g(b) = -af'(a) + f(a)$

$\iff a f'(a) + g(-a) = -a f'(a) + f(a)$ car $g'(b) = f'(a)$ et $a = -b$

$\iff 2af'(a) + g(-a) - f(a) = 0.$

$f'(a) = e^a$ $\iff 2ae^a + 1 - e^a - e^a = 0$

$\iff 2e^a(a-1) + 1 = 0.$

$\iff$ a solution de l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

C) $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$

1 a) $\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (par th) donc par somme $\boxed{\lim\limits_{-\infty} \varphi = 1}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x-1 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)e^x = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty.}$

b) $\varphi'(x) = 2(x-1)e^x + 2e^x$

$= 2e^x \times x$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ d'où $\varphi'(x)$ est du signe de x

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Sur $]-\infty\,;\,0[$

$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ strictement décroissante} \\ \varphi \text{ continue} \\ \lim\limits_{-\infty} \varphi = 1\,;\ \varphi(0) = -1 \text{ et } 0 \in [-1\,;1[\end{array}\right\}$ donc d'après le th de la bijectᵒ, il existe α unique dans $]-\infty, 0]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

De même sur $[0, +\infty[$

$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ strictement } \nearrow \\ \varphi \text{ continue} \\ \varphi(0) = -1\,;\ \lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty\,;\ 0 \in [-1, +\infty[\end{array}\right\} \Longrightarrow$ il existe $\beta \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$.

finalement $\varphi(x) = 0$ admet 2 solutᵒ $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.

b) par balayage à la calculatrice : $\alpha \simeq -1{,}68$; $\beta \simeq 0{,}77$.

D) $E(\alpha, f(\alpha))$ $\quad F(-\alpha, g(-\alpha))$

(EF) a pour coef directeur $m = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{g(-\alpha) - f(\alpha)}{-\alpha - \alpha}$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{\alpha} - e^{\alpha}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left(1 - 2e^{\alpha}\right)$$

$\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{C}_f$ en E a pour coeff dir $m' = f'(\alpha) = e^{\alpha}$

$$m - m' = \frac{1}{2\alpha}\left(2e^{\alpha} - 1\right) - e^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(2e^{\alpha} - 1 - 2\alpha e^{\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha}\left(2(1-\alpha)e^{\alpha} - 1\right) = -\frac{\varphi(\alpha)}{2\alpha} = 0$$

d'où $m = m' \Longrightarrow (EF) \parallel \mathcal{D}$. mais de plus $E \in \mathcal{C}_f \Rightarrow (EF) = \mathcal{D}$

La droite (EF) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E.

② De même, montrons que le coef m de (EF) est égal au coeff directeur m'' de la tangente à $F(-\alpha, g(\alpha))$ à g.

On a $m'' = g'(-\alpha)$ et $g'(x) = e^{-x}$

$= e^{\alpha}$

or d'après D① on a bien $m = e^{\alpha}$

d'où F étant un point de $\mathcal{C}_g$ on déduit (EF) tangente à $\mathcal{C}_g$ en F.

(II) $Z_1 = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13}$

$Z_2 = \frac{2i+3}{3i-2} = \frac{(2i+3)(-3i-2)}{9+4} = \frac{-13i}{13} = -i$

$Z_3 = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{-3+4i}{5}$

(III) ⓐ $\frac{z+2}{z+2i} = i \iff z+2 = i(z+2i)$

$\iff z(1-i) = -2-2 \iff z = \frac{-4}{1-i} = \frac{-4(1+i)}{2} = -2(1+i)$

ⓑ $3i\bar{z} = 1-i \iff \bar{z} = \frac{1-i}{3i} = \frac{(1-i)i}{-3} = \frac{i+1}{-3} = -\frac{1}{3} - \frac{i}{3} \implies z = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}$

ⓒ $2z + i\bar{z} = 5-i$ (E)

posons $z = x+iy$ alors (E) $\iff 2x+2iy + i(x-iy) = 5-i$

$\iff 2x+2iy + ix + y = 5-i$

$\iff 2x+y-5 + i(x+2y+1) = 0$

donc par identificat° des parties réelles et imaginaires

$$\begin{cases} 2x+y = 5 \\ x+2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y = 5 \\ 3y = -7 \quad 2L_2 - L_1 \end{cases}$$

d'où $y = -\frac{7}{3}$ et $x = \frac{1}{2}(5-y)$

$= \frac{1}{2}(5 + 7/3) = \frac{11}{3}$ d'où $\boxed{z = \frac{11}{3} - i\frac{7}{3}}$.