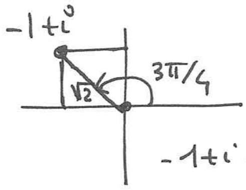
DS 7 - 13 janvier 2014

I

$a = -5+5i$

$= 5(-1+i)$

$= 5\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$



$-1+i = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$

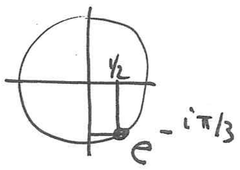
Soit $w = \sqrt{3} - 3i$

$|w|^2 = 3+9 = 12 \implies |w| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

donc $w = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\, i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)$

$= \boxed{2\sqrt{3}\, e^{-i\pi/3}}$.



donc $b = (\sqrt{3} - 3i)^4$

$= \left(2\sqrt{3}\, e^{-i\pi/3}\right)^4$

$= 16 \times 9\, e^{-i4\pi/3}$

$= \boxed{144\, e^{-i4\pi/3}}$

$c = -i\, e^{i\pi/3} = e^{-i\pi/2} \times e^{i\pi/3}$

$= \boxed{e^{-i\pi/6}}$.

II ② $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3} i - 2 - 3i\sqrt{3}$

$= -2 - \frac{10 i\sqrt{3}}{3}$

$z_{\vec{DC}} = c - d$

$= -4 - 3i\sqrt{3} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} i = -2 - \frac{10 i\sqrt{3}}{3}$

$z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}} \implies \vec{AB} = \vec{DC} \implies$ ABCD parallélogramme.

③ $\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{-2+\frac{\sqrt{3}}{3}i+\frac{\sqrt{3}}{3}i}{-4-3i\sqrt{3}-2-3i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-\frac{6}{3}+\frac{2i\sqrt{3}}{3}}{-6-6i\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{6-2i\sqrt{3}}{6(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{18}\,\frac{(6-2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{-8i\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{i\sqrt{3}}{9}.$$

donc $\dfrac{d-b}{c-a}$ est imaginaire pur.

④ par th $(\vec{AC},\vec{BD}) = \arg\left(\dfrac{d-b}{c-a}\right) = \arg\left(-\dfrac{i\sqrt{3}}{9}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

d'où $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ et donc ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, donc ABCD losange.

III A ① $Z = \dfrac{z+3}{z-i}$

$$= \frac{(x+iy+3)}{x+iy-i} = \frac{x+3+iy}{x+i(y-1)}$$

$$= \frac{(x+3+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x(x+3)+y(y-1)+i(xy-(y-1)(x+3))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+3x+y^2-y+i(x-3y+3)}{x^2+(y-1)^2}$$

On déduit en particulier $\operatorname{Re} Z = \dfrac{x^2+3x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$

② $M(z)\in\mathcal{E} \iff Z$ imaginaire pur avec $z\neq i$

$\iff \operatorname{Re} Z = 0 \iff x^2+3x+y^2-y=0$ avec $(x,y)\neq(0,1)$

$\iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$

donc $M \in \mathcal{E} \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$ avec $(x,y) \neq (0,1)$

donc $\mathcal{E}$ est un cercle de centre $\Omega\left(-3/2 ; \frac{1}{2}\right)$ et rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ privé du point $A(0;1)$.

③ De même $M(z) \in \mathcal{F} \iff Z \in \mathbb{R}$ avec $(x,y) \neq (0,1)$

$\iff \operatorname{Im} Z = 0$

$\iff x - 3y + 3 = 0 \quad (x;y) \neq (0,1)$

$\iff y = \frac{1}{3}x + 1$ et $(x,y) \neq (0,1)$

donc $\mathcal{F}$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + 1$ privée du point $A(0;1)$

Partie B :

$M(z) \in \mathcal{H} \iff |Z| = 1$

$\iff \left|\frac{z+3}{z-i}\right| = 1 \iff |z+3| = |z-i|$

Soit $A'(-3)$; $B'(i)$

alors $M \in \mathcal{H} \iff A'M = B'M \iff M$ point de la médiatrice de $[A'B']$

donc $\mathcal{H}$ médiatrice de $[A'B']$.