DS 8 - 1h.

I (1) $z^2 - 2z + 4 = 0$

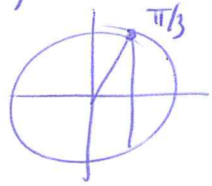
$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$

donc l'équation admet deux racines : $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{12}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$

ou $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

et $|z_1|^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow |z_1| = 2$ d'ou $z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \boxed{2e^{i\pi/3}}$



on a $z_2 = \bar{z}_1 = \overline{2e^{i\pi/3}} = \boxed{2e^{-i\pi/3}}$.

avec les notations de l'exercice $z' = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $z'' = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$

(2) on a alors $z'^{2004} = \left(2e^{i\pi/3}\right)^{2004}$

$= 2^{2004} e^{i\frac{2004\pi}{3}}$

$= 2^{2004} e^{668i\pi} = 2^{2004}$ car 668π multiple de 2π.

II (1) $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4 = 4\left(\cos^2(\pi/5) - 1\right)$

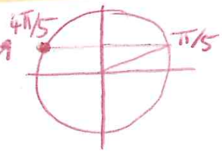
$= -4\sin^2(\pi/5) < 0$ et $|\Delta| = 4\sin^2 \pi/5 = \left(2\sin(\pi/5)\right)^2$

(car $\sin\frac{\pi}{5} > 0$)

ainsi (E) admet deux racines complexes :

$z_1 = \dfrac{-2\cos\pi/5 + 2i\sin(\pi/5)}{2} = \boxed{-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}}$

et $z_2 = \boxed{\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\pi/5}$



(2) On a $z_1 = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(+\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(+\frac{4\pi}{5}\right) = \boxed{e^{+i\frac{4\pi}{5}}}$

et $z_2 = \bar{z}_1 = \boxed{e^{-i\frac{4\pi}{5}}}$

III $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) ~~$\forall z \in \mathbb{C}$~~ $(z^2+3)(az^2+bz+c) = az^4 + z^3(b) + z^2(c+3a) + 3bz + 3c$

et donc par identification avec le polynôme P on a.

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c+3a=24 \\ 3b=-18 \\ 3c=63 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=21 \end{cases}$$

On a donc $\boxed{P(z) = (z^2+3)(z^2-6z+21)}$

2) $P(z)=0 \iff z^2+3=0$ ou $z^2-6z+21=0$

$z^2+3=0 \iff z^2=-3 \iff z=\sqrt{3}\,i$ ou $z=-\sqrt{3}\,i$

$z^2-6z+21=0$

$\Delta = 36-84 = -48 = -16\times 3$ ainsi $\sqrt{|\Delta|} = 4\sqrt{3}$.

on a deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2} = 3+2i\sqrt{3}$

et $z_2 = \dfrac{6-4i\sqrt{3}}{2} = 3-2i\sqrt{3}$

3) Voir figure

4) E symétrique de D par rapport à O

$\iff \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OD}$

$\iff 0 - z_E = z_D - 0 \iff z_E = -z_D$ d'où $\boxed{E(-3+2i\sqrt{3})}$

⑤ $$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}} = \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$$

et $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$

$-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{2i\pi/3}$

d'où $$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{2i\pi/3}} = e^{-i\pi/3}$$

⑥ On déduit par passage au module :

$$\frac{BC}{BE} = \left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = |e^{-i\pi/3}| = 1 \implies BC = BE.$$

et par th $(\vec{BE};\vec{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = \arg(e^{-i\pi/3}) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

ainsi le triangle BEC est équilatéral

⑦ En traçant les médiatrices des 2 segments et [AC] et [AB] on conjecture que le centre du cercle circonscrit a pour affixe 3.

Soit $\Omega(3)$ montrons que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

$|\Omega A|^2 = |3-i\sqrt{3}|^2 = 12$
$|\Omega B|^2 = |3+i\sqrt{3}|^2 = 12$
$|\Omega C|^2 = |2i\sqrt{3}|^2 = 4\times 3 = 12$
$|\Omega D|^2 = |-2i\sqrt{3}|^2 = 12$

$$\boxed{\text{ainsi } \Omega(3) \text{ est le centre d'un cercle de rayon } \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ passant par les points } A, B, C, D.}$$